ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
Edhec / esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

MATHÉMATIQUES I

Année 1991

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice1

On considère l'intégrale $F(x) = \int\limits_0^1 \ln(1+xt^2)dt$

1. (a) Montrer que F est définie sur $]-1,+\infty[$.
   (b) Montrer que F est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
2. (a) Montrer que pour tout u réel > 0 et pour tout h réel tel que $0 < u - |h|$, on a
$$\left|\ln(u+h) - \ln u - \frac{h}{u}\right| \leqslant \frac{h^2}{2(u-|h|)^2}$$
   (b) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et pour tout h non nul tel que $-1 < x - absh$, on pose :
$$D(x,h) = \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x) - h\int\limits_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2}dt\right)$$
   Montrer en utilisant 2)a) que :
   - pour tout $x > 0$ et pour tout h tel que $|h|$ soit assez petite,
$$|D(x,h)| \leqslant \frac{|h|}{10}$$
   - pour tout $x \in]-1,0]$ et pour tout h tel que $|h|$ soit assez petite,
$$|D(x,h)| \leqslant \frac{|h|}{10(1+x-|h|)^2}$$

   (c) En déduire que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$; donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'intégrale.
3. Evaluer $F'(x)$ dans chacun des cas suivants
   (a) $x = 0$;
   (b) $x > 0$;
   (c) $x \in]-1,0[$

Exercice 2

Pour lancer un nouveau produit, la société Rochester a conçu, pour la télévision, n spots publicitaires différents, de 30 secondes chacun.
Chaque spot a été testé auprès d'un échantillon représentatif des téléspectateurs regardant la télévision entre 19 heures et 22 heures 30. Il ressort de cette étude, que chacun des spots a une probabilité p constante d'être perçu comme original et bien réalisé, par un téléspectateur.
Si, pour un même téléspectateur, et dans un délai de trois jours, k spots publicitaires, parmi les n, sont perçus comme originaux et bien faits alors, selon le spécialiste en communication de la société Rochester, la probabilité qu'il retienne le nom du nouveau produit est
$$ak + bk^2$$
où a et b sont des constantes strictement positives connues.
Les n spots publicitaires relatifs à ce produit sont diffusés chacun une fois pendant une période de trois jours consécutifs.
On suppose, pour simplifier, que ce sont les mêmes personnes qui, chaque soir, pendant ces trois jours, regardent la télévision entre 19 heures et 22 heures 30.

1. Quelle est la probabilité que chaque téléspectateur retienne le nom du nouveau produit ?
2. Déterminer n pour qu'au moins 40% des téléspectateurs retiennent le nom du nouveau produit.

Problème

Partie I

A.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune deux boules identiques, ne différant que par leur couleur : une blanche et une noire. Une expérience consiste à prélever simultanément une boule dans chacune des deux urnes et à les échanger : on met donc dans U_2 la boule prélevée dans U_1 et vice versa.
On recommence indéfiniment cette expérience.
On note X_k le nombre aléatoire de boules blanches dans U_1 à l'issue de la k-ième expérience.
On pose $X_0 = 1$.
On pourra utiliser des événements tels que $b_k^{(1)}$ = prélever une boule blanche dans U_1 lors de la k-ième expérience.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable X_1 ?

2. Former le système de relations qui définit la loi de probabilité de X_k en fonction de celle de X_{k-1}.

3. On pose $u_k = P[X_k = 0]$, $v_k = P[X_k = 1]$, $w_k = P[X_k = 2]$

   (a) Ecrire l'algorithme qui fournit les valeurs de u_k, v_k, w_k pour une valeur de k donnée.

   (b) Montrer que la détermination des trois suites dépend de la seule suite v.
   Former la relation de récurrence qui lie les termes de la suite v.

   (c) Achever la détermination de v_k et de la loi de probabilité de X_k.

B.

b, n, r, s sont quatre entiers strictement positifs. A présent l'urne U_l contient b boules blanches et n boules noires et l'urne U_2 contient r boules blanches et s boules noires.
On reproduit la même expérience qu'au **A**.
X_k représente toujours le nombre de boules blanches que contient U_l à l'issue de la k-ième expérience.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable X_1 ?

2. (a) A quelle condition nécessaire sur les entiers b, n, r, s un événement $(X_k = 0)$ est-il réalisable ?

   (b) Ecrire alors la formule permettant de déterminer $P[X_k = 0]$.

3. (a) Quelles valeurs ℓ peuvent être atteintes par la variable X_k ?

   (b) Dorénavant on suppose $b \leqslant s$ et $n \leqslant r$.
   Ecrire le système de relations permettant de déterminer la loi de probabilité de X_k en fonction de celle de X_{k-1}.

Partie II

Les notations sont celles de la partie **I-B**. On prend $b = s = 1$, $n = 2$, $r = 3$. M et Q sont les matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{12} & \frac{4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{6}{12} & \frac{6}{12} & \frac{9}{12} \\ 0 & 0 & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 12 & 0 \\ 3 & -3 & 18 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose pour tout k entier strictement positif

$$C_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[Xk = 2] \\ P[X_k = 3] \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Contrôler que pour tout k entier $> 0 \quad C_k = M.C_{k-1}$.
2. Expliquer pourquoi la somme des éléments d'une colonne quelconque de M est égale à 1.
3. (a) Calculer le produit MQ.
   (b) Reconnaître alors des valeurs propres et des vecteurs propres de M.
   (c) En déduire que Q est inversible et qu'il existe une matrice diagonale D telle que
   $$M = QDQ^{-1}$$
   (d) Former Q^{-1}.
4. (a) Déduire des résultats de la question 3 la matrice C_k.
   (b) Pour $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$, quelle est la limite de $P[X_k = \ell]$ quand k tend vers $+\infty$?