

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 1991

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. On appelle f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à \mathcal{B} est la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image du vecteur $u = i + j + 2k$ par l'application f .
Que peut-on dire du vecteur u pour l'application f ?

2. On pose $v = 3j + 2k$ et $\mathcal{B}' = (u, v, k)$

(a) Démontrer que \mathcal{B}' est une base de E

(b) Soit P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
Calculer la matrice inverse de P .

(c) Déterminer la matrice T de f relativement à la base \mathcal{B}' .

3. On considère la matrice N suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer N^2 . En déduire N^k si k est un entier supérieur ou égal à 2.

(b) Calculer $I + N$. Déterminer T^n en fonction de n et de N , puis de n uniquement.

(c) Montrer que $P.N.P^{-1} = A - I$ et que $P.N^2.P^{-1} = A^2 - 2A + I$

(d) Donner l'expression de A^n en fonction de n , I , A et A^2 .

Exercice 2

On considère la suite (u_n) dont le terme général est défini par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^n} dx = \int_0^1 (1-x^n)^{1/3} dx$$

1. Calculer u_1 .

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

3. Démontrer que, pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a:

$$1 - x \leq \sqrt[3]{1-x} \leq 1 - \frac{x}{3}$$

Interpréter graphiquement la double inégalité précédente.

4. En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

5. On considère la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y .

- (b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y .
 Construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthogonnel, d'unité 3cm sur chaque axe.
- (c) Calculer l'espérance de la variable Y
- (d) Calculer la probabilité de l'événement : $(0,488 < Y \leq 1,2)$

On rappelle que : $2^9 = 512$.

Problème

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes.

La première partie propose une estimation du paramètre de la loi de Poisson suivie par une variable aléatoire; la seconde partie étudie l'intervalle de temps qui sépare deux réalisations successives d'un phénomène aléatoire.

Partie I

La société SA POIN est spécialisée dans la location de camions. La direction pense que le nombre de véhicules loués un jour j donné est une variable aléatoire X_j , que les variables X_j sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi de Poisson de paramètre a inconnu.

1. On considère, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_k définie pour tout x réel positif ou nul par : $f_k(x) = \frac{x^k e^{-x}}{k!}$

On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O; i, j)$, l'unité étant 2cm sur l'axe des abscisses, 10cm sur l'axe des ordonnées.

- (a) Construire le tableau des variations de f_k .
- (b) Préciser l'équation de la demi-tangente à la courbe (C_k) au point $O(0,0)$.
- (c) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sur le même graphique.
2. On considère, pour tous les entiers k et q non nuls, la fonction g définie pour tout x réel positif ou nul par: $g(x) = (f_k(x))^q$.
- (a) Démontrer que g et f_k ont même sens de variation.
- (b) Donner le tableau de variation de g lorsque $k = 8$ et $q = 4$.
3. La société SA POIN relève le nombre de véhicules loués au cours de 4 journées choisies au hasard, soit: 9, 11, 4, 8 pour les jours $j = 1, j = 2, j = 3, j = 4$ respectivement.

- (a) Déterminer la probabilité P_a de l'événement:

$$(X_1 = 9) \cap (X_2 = 11) \cap (X_3 = 4) \cap (X_4 = 8)$$

Exprimer P_a en fonction de a la fonction définie en 2) b: .

- (b) La direction de la société SA POIN décide de retenir la valeur a qui donne à la probabilité P_a une valeur maximum.
- Trouver le réel a
 - Calculer alors la probabilité qu'un jour donné, la société SA POIN loue 10 camions.
4. On se propose de généraliser le procédé. On a noté le nombre de locations au cours de n journées choisies au hasard, soit:

x_1, x_2, \dots, x_n pour les jours $j = 1, j = 2, \dots, j = n$ respectivement.

On note m la moyenne arithmétique de ces observations.

L'entreprise décide toujours de choisir a de telle sorte que la probabilité P_a de l'événement :

$$E = (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)$$

soit maximum.

- (a) Calculer P_a en fonction de a .
- (b) Démontrer que la valeur de a qui maximise P_a est m .

Partie II

La société SA POIN étudie, pour un jour donné, le temps FTL exprimé en heures, entre deux locations successives: T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/3$.

1. (a) Rappeler l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire T .
- (b) Redémontrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est définie par:

$$F(x) = P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (c) En déduire la probabilité (exprimée en fonction du nombre e) que le temps séparant deux locations successives soit, pour ce jour observé, compris entre 1 heure et 2 heures.
2. Soit t un réel positif fixé pour toute la suite du problème. Soit la variable aléatoire Y_t ayant pour fonction de répartition la fonction G_t définie par:

$$G_t(y) = P(Y_t \leq y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq t \\ \frac{F(y)}{F(t)} & \text{si } y < t \end{cases}$$

En déduire une densité de probabilité g_t de la variable Y_t .

3. Soit $Z_1, Z_2 \dots Z_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que Y_t . On pose $S_n = \sup(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.
- (a) Démontrer que la fonction de répartition H_t de S_n est définie par:

$$H_t(s) = (G_t(s))^n$$

- (b) En déduire la densité de probabilité de la variable S_n notée h_t .
4. Soit b un réel positif.
- (a) On pose $p_n(b) = P(|S_n - t| > b)$. Montrer que $p_n(b) = P(S_n < t - b)$.
- (b) Calculer $p_n(b)$.
- (c) Déterminer la limite de $p_n(b)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On définit la variable aléatoire $U_n = n(t - S_n)$. Pour tout réel u , on pose

$$K_n(u) = P(U_n \leq u)$$

- (a) Exprimer $K_n(u)$ en fonction de u .

- (b) Ecrire le développement limité à l'ordre 1, par rapport à $\frac{u}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ de $\exp\left(-\frac{1}{3}\left(t - \frac{u}{n}\right)\right)$

- (c) On pose $c = \frac{\exp(-t/3)}{1 - \exp(-t/3)}$ et on considère un réel u fixé.

En déduire la limite de $K_n(u)$ lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de u et c .

- (d) On note $K(u)$ cette limite. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U dont la fonction de répartition est la fonction K ainsi définie.