

ECRI COME

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

MATHÉMATIQUES

Année 1988

Aucun document n'est autorisé, hormis ceux joints au texte (trois documents).

L'énoncé comporte 8 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

1. On pose

$$I(n, p) = \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^p dx$$

où n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

(a) Etablir que pour $n \geq 1$ et p quelconque : $I(n, p) = -\frac{n}{p+1} I(n-1, p+1)$.

(b) Calculer, en fonction de n et p , $I(n, p)$ et préciser la valeur de $I(p, p)$.

2. Soit L_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, où $\frac{d^n}{dx^n} [f]$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f et n est un entier naturel quelconque.

(a) Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

(b) Démontrer que, pour tout n , L_n est une fonction polynômiale de degré n dont on précisera le coefficient de x^n .

(c) Montrer que pour n non nulle et pour i prenant les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$, $\frac{d^i}{dx^i} [(x^2 - 1)^n]$ est un polynôme admettant -1 et 1 comme racines.

3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $K_n = \int_{-1}^1 L_n(x) \cdot L_n(x) dx$

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITES LES QUESTIONS 2 ET 3 SONT INDEPENDANTES DE LA PREMIERE

Des messages codés à l'aide de 0 et de 1 sont envoyés régulièrement d'un point A à un point B . La transmission des ces messages est affecté par des perturbations appelées bruit. Ce bruit suit une loi centrée réduite. Pour en atténuer les effets, le responsable de l'opération décide d'amplifier l'écart entre les deux valeurs en transmettant -1 au lieu de 0 et 2 à la place de 1.

Si E désigne la valeur émise en A (soit -1 ou 2), alors la valeur reçue en B est $R = E + Z$, somme des deux variables aléatoires E et Z .

- Si R est supérieur à un seuil s positif ou nul, alors le message doit être interprété comme un 1.
- Si $R < 0$, on retient 0.
- Si $0 \leq R \leq s$, le message ne peut être interprété correctement et l'opération correspondante est annulée.

Cette annulation coûte 200 unités. De même, si le message 0 est codé comme 1, il en coûte 500 unités. Inversement, si le message 1 est codé comme zéro, le coût associé est de 1000 unités. 80 % des messages transmis sont des 1 donc 80 % des valeurs émises sont des 2.

1. Quelle est la valeur du seuil s qui minimise l'espérance du coût ?
2. Le seuil étant dorénavant pris égal à zéro, on envoie de A vers B le message 1101001.
Quelle est la probabilité que le message ci-dessus soit correctement interprété en B ?
3. Le message du 2. décodé en B est réémis par B vers un autre lieu C dans les mêmes conditions que précédemment ($s = 0$).
Quelle est la probabilité que le message soit le même en A et en C ?

PROBLEME

Les parties A et B sont largement indépendantes

Première partie -A

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle de centre O , de rayon 1. On désigne par M_1, M_2, M_3, M_4 les points de ce cercle définis respectivement par les couples de coordonnées $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

Un point lumineux se déplace aléatoirement sur ce cercle.

A l'instant $t = 0$, il se trouve en M_1 .

S'il se trouve à l'instant $t = n$ en M_i , il se positionne à l'instant $t = n + 1$ en l'un des deux points les plus proches de M_i avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun d'eux, il ne pourra donc pas se positionner au point diamétralement opposé à M_i .

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant $t = n$, le point se trouve respectivement en

M_1, M_2, M_3, M_4 et V_n la matrice unicolonne $V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = AV_n$.

(b) En déduire V_n en fonction de A et n .

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^3 .

(b) Expliciter A^n , $n \in \mathbb{N}$, et préciser les valeurs de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n (question 1).

3. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et f l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base B est A .

(a) Déterminer le noyau $\ker f$ et l'image $\text{Im } f$ de l'endomorphisme f .

(b) Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.

(c) Etablir l'existence d'une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de E telle que relativement à cette base B' , l'endomorphisme f ait comme matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f et donner, pour chaque valeur propre, le sous-espace propre associé.

(e) Préciser une matrice de passage P de B à une base B'' uniquement constituée de vecteurs propres.

(f) Retrouver à l'aide de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

Deuxième partie -B

Dans cette partie B, tout point M , d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ayant comme coordonnées (a, b) est associé à son affixe $z = a + ib$, i désigne le complexe de module 1, d'argument $\frac{\pi}{2}$.

En désignant par n un entier naturel non nul, on note w le complexe de module 1, d'argument $\frac{2\pi}{n}$; on rappelle que $w^n = 1$.

1. On considère de nouveau le problème étudié en **A-1**. mais en supposant désormais que le point se déplace selon les règles suivantes

- A l'instant $t = 0$, le point lumineux est en M_1
- Si à l'instant $t = n$, le point lumineux est en un point du cercle dont l'affixe est d'argument θ , le point se placera à l'instant $t = n + 1$ en un point du cercle dont l'argument est $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité p ou $\theta - \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note encore $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant $t = n$ le point lumineux se trouve

respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = AV_n$.

(b) Montrer que A admet comme vecteurs colonnes propres les vecteurs suivants :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

et préciser les valeurs propres associées.

(c) Montrer que les quatre vecteurs C_1, C_2, C_3, C_4 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des matrices de type $(4, 1)$ à coefficients complexes.

(d) Soit V un vecteur colonne s'écrivant

$$V = \sum_{k=1}^4 \mu_k \cdot C_k \text{ où } \mu_k \in \mathbb{C} \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4.$$

Calculer AV puis $A^n V$ en fonction de C_1, C_2, C_3, C_4 .

(e) Dédire de ce qui précède $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n en fonction de n et de la probabilité p .

2. Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ n complexes distincts deux à deux.

Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(z_k^l se lit z_k élevé à la puissance l)

(a) Montrer que le rang de M est celui de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-2} \end{pmatrix}$.

(b) En déduire le rang de M .

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ désignent n nombres complexes.

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ le vecteur colonne

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de A .

Préciser la valeur propre associée.

(b) On fixe $n = 4$. Montrer que A est diagonalisable et préciser une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale, écrire la matrice D .

(c) Etablir pour n quelconque que A est diagonalisable et préciser P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4. On reprend le problème du déplacement aléatoire d'un point sur le cercle de centre 0, de rayon 1. On généralise la situation étudiée précédemment en envisageant N points sur ce cercle, notés $M_0, \dots, M_{N-1}$

d'affixe complexe $1, w, w^2, \dots, w^{N-1}$ où $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

- A l'instant $t = 0$, le point lumineux se trouve en M_0
- Si à l'instant $t = n$, le point lumineux se trouve en M d'affixe $e^{i\theta}$ le point peut se placer à l'instant $t = n + 1$ en M' d'affixe $e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})}$ avec la probabilité p ou en M'' d'affixe $e^{i(\theta - \frac{2\pi}{n})}$ avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note $p_0(n), \dots, p_{N-1}(n)$ les probabilités pour que le point lumineux soit à l'instant n respectivement en $M_0, \dots, M_{N-1}$ et

$$V_n = \begin{pmatrix} p_0(n) \\ \vdots \\ p_{N-1}(n) \end{pmatrix}.$$

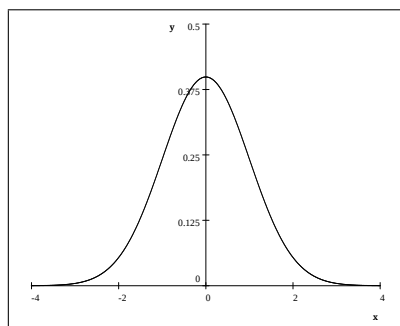
(a) Quelle matrice permet d'écrire $V_{n+1} = AV_n$.

(b) Généraliser les résultats obtenus en **B-1**.

Voir annexes pages suivantes

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



Note

La table donne les valeurs de $F(u)$ pour u positif.
Lorsque u est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple

pour $u = 1.37$ $F(u) = 0.9147$

pour $u = -1.37$ $F(u) = 0.0853$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0.998 65	0.999 03	0.999 31	0.999 52	0.999 66	0.999 77	0.999 841	0.999 892 8	0.999 968	0.999 997

Loi Binomiale $B(n, p)$

Probabilité individuelle : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

$n = 1$

$n \setminus p$	10%	20%	30%	40%	50%
0	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000
1	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000

$n = 2$

$n \setminus p$	10%	20%	30%	40%	50%
0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
1	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500

$n = 3$

$n \setminus p$	10%	20%	30%	40%	50%
0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
1	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
2	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250

$n = 4$

$n \setminus p$	10%	20%	30%	40%	50%
0	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
1	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
2	0,0486	0,1536	0,2646	0,3465	0,3750
3	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625

$n = 5$

$n \setminus p$	10%	20%	30%	40%	50%
0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
1	0,3290	0,4096	0,3602	0,2592	0,1562
2	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
3	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
4	0,0004	0,0064	0,0284	0,0769	0,1562
5	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312

LOI DE POISSON $P(\lambda)$

PROBABILITE INDIVIDUELLE : $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$\lambda \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002				
0.2	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0001			
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0003			
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0007	0.0001		
0.5	0.6065	0.3033	0.0758	0.0126	0.0016	0.0002		
0.6	0.5488	0.3293	0.0988	0.0198	0.0030	0.0004		
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0284	0.0050	0.0007	0.0001	
0.8	0.4493	0.3595	0.1438	0.0383	0.0077	0.0012	0.0002	
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0494	0.0111	0.0020	0.0003	
1.0	0.0379	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	0.0001
1.5	0.2231	0.3347	0.2510	0.1255	0.0047	0.0014	0.0035	0.0008
2	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034
2.5	0.0821	0.2052	0.2565	0.21376	0.1336	0.0668	0.0278	0.0099
3	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	0.1680	0.1008	0.0504	0.0216
3.5	0.0302	0.1057	0.1850	0.2158	0.1888	0.1322	0.0771	0.0385
4	0.0183	0.0733	0.1465	0.1954	0.1954	0.1563	0.1042	0.0595
4.5	0.0111	0.0500	0.1125	0.1687	0.1898	0.1708	0.1281	0.0824
5	0.0067	0.0337	0.0842	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044

$\lambda \backslash k$	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1.5	0.0001								
2	0.0009	0.0002							
2.5	0.0031	0.0009	0.0002						
3	0.0081	0.0027	0.0008	0.0002	0.0001				
3.5	0.0169	0.0066	0.0023	0.0007	0.0002	0.0001			
4	0.0298	0.0132	0.0053	0.0019	0.0006	0.0002	0.0001		
4.5	0.0463	0.0232	0.0104	0.0043	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	
5	0.0653	0.0363	0.0181	0.0082	0.0343	0.0013	0.0005	0.0002	0.0001