

**Exercice 1**

Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants

$$1. A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{cases} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$2. B = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{cases} \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \right\}$$

$$3. C = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{cases} 2a - 3b + c + 2d = 0 \\ a - 2b - 3c - 4d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$4. D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ -2a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$5. E = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} X = 2X\}$$

$$6. F = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = 6X\}$$

**Exercice 2**

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

Pour chacune des applications suivantes, expliciter une matrice  $A$  telle que  $\forall X \in E$ ,  $f(X) = AX$ . En déduire que  $f$  est linéaire et expliciter  $\ker(f)$ , le noyau de  $f$ , ainsi que  $\text{Im}(f)$ , son image.

$$1. E = F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$2. E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

$$3. E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$$4. E = F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$$

$$5. E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - c + d \\ 2a + c + 2d \\ a - b + 2c + d \end{pmatrix}$$

$$6. E = F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t + 2x + y + z \\ 2z + 2y + 3t \\ 3t + 2z \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$7. E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 3a + b + 2c \\ 2a + 3b + c \\ a + b + c \end{pmatrix}$$

**Exercice 3**

On considère deux matrices  $A$  et  $B$  telles que  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  ainsi que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XB \end{array}$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. Expliciter son noyau lorsque  $n = 2$  et

$$\bullet A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A = B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$