

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Donner le domaine de définition de g ainsi que ses variations.
3. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\frac{1}{3}$? en $-\frac{2}{3}$? en $\frac{3}{13}$? en -1 ?
Si oui, calculer les dérivées correspondantes.
4. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g .
5. Tracer dans un même repère \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
(on admettra que f admet un et un seul point d'inflexion qui vaut -0.35 ± 10^{-2} et on supposera l'équation de la tangente en ce point est $y = 1,5x$, qu'avant ce point, la fonction est convexe, et qu'ensuite, elle est concave).

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

1. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[3, +\infty[$ sur un intervalle G à expliciter. On note g sa réciproque.
2. Quel est le domaine de définition de g ? En quels points g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0)$, $g'(3)$ et $g'(8)$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $] -\infty, 3]$ sur un intervalle H à expliciter. On note h sa réciproque.
4. Quel est le domaine de définition de h ? En quels points h est-elle dérivable ? Calculer $h'(0)$, $h'(3)$ et $h'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormé \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h .

Exercice 3

Soit $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. On note g sa réciproque. Quel est le sens de variations de g ?
3. La fonction g est-elle dérivable sur J tout entier ?
4. Représenter dans un même repère orthonormé \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 4

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. Montrer que f possède une réciproque f^{-1} et donner $\mathcal{D}_{f^{-1}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.
3. Quelle est l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$?
Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\frac{1}{10}$?
4. Tracer \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , expliciter f' .
2. Dresser le tableau de variations de f (limites incluses) et tracer dans un repère orthormée \mathcal{C}_f .
3. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à expliciter.
4. En quel point sa réciproque est-elle dérivable ?
5. Calculer $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6. Déterminer $(f^{-1})'(x)$ lorsque f^{-1} est dérivable en x .
7. Soit $x \in f(\mathbb{R})$. Déterminer son antécédent par f . En déduire f^{-1} .
8. Retrouver directement les résultats de la question 4.
9. Tracer dans le même repère que la question 4 $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x \ln x$.

1. Etudier les variations de f .
2. En déduire que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. En quel point f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e)$.
5. Tracer dans un même repère orthonormé \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.