**Exercice 1**
On admet que l'égalité $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in ]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.

Soit $p$ un nombre réel tel que $0 < p < \dfrac{2}{3}$. Dans un pays, la probabilité $q_n$ qu'une famille ait exactement $n$ enfants est de $p^n/2$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité $q$ qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité $q_0$ qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On considère une famille de $n$ enfants ;
   calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement $k$ garçons.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^\times$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement $k$ garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

**Exercice 2**
Une urne contient des boules de trois couleurs différentes $C_1$, $C_2$, $C_3$. La probabilité de piocher une boule de couleur $C_i$ est égale à $p_i$ avec $p_1+p_2+p_3=1$. On pioche, avec remise, les boules une à une jusqu'à l'obtention d'une boule de couleur différente de ses précédentes et on note $X$ le nombre de tirages nécessaire. Par exemple, si les tirages ont donné $C_2C_2C_2C_3$ alors $X=4$.

Donner la loi de $X$, justifier que $X$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 3**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0<a<1$ et $0<b<1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées $A$ et $B$. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce $A$ donne "pile" est $a$, et que la probabilité que la pièce $B$ donne "pile" est $b$.
Soit $X$ le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce $A$ donne "face" pour la première fois, et $Y$ le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce $b$ donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de $X$ et de $Y$ ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X=Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X>k)$.
   En déduire les probabilités $P(X>Y)$ et $P(X \geqslant Y)$. Interprétation.
4. On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne "face" pour la première fois.. Pour cela, on note $M$ la var définie par $M=\min(X,Y)$.
   Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$, la probabilité $P(M \geqslant k)$.
   En déduire la loi de probabilité de $M$.
5. On note $U=X+Y$. Déterminer la loi de probabilité de $U$.
   Calculer, pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, les probabilités conditionnelles $P_{(U=j)}(Y=k)$.
6. On suppose désormais que $a=b=\dfrac{1}{2}$. On note $D=|X-Y|$.
   Calculer $D(\Omega)$ puis les probabilités $P(D=0)$ et $P(D=1)$. Déterminer la loi de probabilité de $D$. Justifier que $D$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 4**
On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in ]0,1[$. On lance indéfiniment la pièce et on note $T$ la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF.

1. Calculer les probabilités $P(T=2)$, $P(T=3)$ et $P(T=4)$.
2. Exprimer l'évènement $(T=n)$ à l'aide des évènements P et F.
3. En déduire la loi de $T$. Justifier que $T$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 5**
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut $p$ et celle de "face" vaut $q$ ($p+q=1$). On lance indéfiniment la pièce et on note $X$ le rang où apparait pour la première fois deux résultats " pile " consécutifs.

1. Calculer en fonction de $p$ et $q$ : $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$
2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 3, P_{(P_1)}(X=n) = qP(X=n-2) \quad \text{et} \quad P_{(F_1)}(X=n) = P(X=n-1)$$
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3, \quad P(X=n) = qP(X=n-1) + pqP(X=n-2)$
4. On suppose à présent que $p=\dfrac{2}{3}$ et $q=\dfrac{1}{3}$.
   (a) On admet que $X$ admet une espérance.
   En utilisant l'égalité de la question 3, calculer $E(X)$.
   (b) A l'aide de la question 3, établir que
   $$\forall n \geqslant 1, \quad P(X=n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$$
   (c) Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $V(X)$