Calcul par récurrence directe

Exercice 1
Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 2
Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 6^{n-1}J$ où $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^n P + b^n Q$

Exercice 4
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Calcul par $A = PBP^{-1}$

Exercice 5
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$ et explicter A^n.

Exercice 6
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ puis D^n et enfin donner les neufs coefficients de A^n

Exercice 7
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -7 & -7 & -11 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 16 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ puis justifier que P et Q sont inversibles et expliciter leur inverse respectif. Déterminer la matrice T vérifiant $A = PTQ$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 8^{n-1}PT^nQ$ et donner tous les coefficients de A^n.

Calcul par polynôme annulateur

Exercice 8
On donne la matrice suivante: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = (\frac{1}{3} - a_n)A + (\frac{2}{3} + a_n)I_3$
3. Vérifier que la suite a est géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 9
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n I$
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut a_0, b_0, a_1 et b_1 ?
4. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 10
On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = 6A - A^2$
2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$
   Donner a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3.
3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Calcul par le binôme de Newton

Exercice 11
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = B + 2I$
Calculer B^2 puis, à l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 12
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 13
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont deux réels.

1. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$
2. Calculer B^2, C^2, BC et CB.
3. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Applications aux suites

Exercice 14
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.
4. On considère trois suites a, b et c telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{cases}$$
   On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
   (b) En déduire l'expression des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ en fonction de n.

Exercice 15
On considère trois suites a, b et c définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases}$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ et montrer que
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1}A^nP$?
5. En déduire les coefficients de A^n puis l'expression des suites a, b et c en fonction de n et des conditions initiales a_0, b_0, c_0.