

Exercice 1

Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = e^{-x} \frac{x}{1+x} \quad b(x) = \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x} \quad c(x) = \frac{e^{4x} - 1}{x}$$

$$d(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad e(x) = \frac{x \ln(1+x) - \exp(x^2)}{x^2} \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{xe^x - e^x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{1+x})^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{1/\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - e^x}{1 - \exp(1/x)}$$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R}^\times et expliciter sa dérivée sur \mathbb{R}^\times .
2. Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. La fonction f est-elle C^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 4

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f est C^1 sur \mathbb{R}^\times et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$
3. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$. En déduire que f est C^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(0)$.

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I . Quelles sont les fonctions qui sont C^1 sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de

dérivabilité

$$I = \mathbb{R} \text{ et } a(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad I = \mathbb{R}_+ \text{ et } b(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$I =]-\infty, 1] \text{ et } c(x) = x\sqrt{1-x} \quad I = [-1, 1] \text{ et } d(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$$

$$I = \mathbb{R} \text{ et } e(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \quad I = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = x\sqrt[3]{x+x^2}$$

$$I = \mathbb{R}_+ \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad I = \mathbb{R} \text{ et } h(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est C^1 sur $] -1, +\infty[$ et expliciter sa dérivée.
2. Quelle est l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x = 0$? Etudier l'existence de tangente horizontale.
3. Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto -x + (1+x) \ln(x+1)$ sur $] -1, +\infty[$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $] -1, +\infty[$. Quel est le signe de f sur $] -1, +\infty[$?
5. Etudier l'existence d'asymptotes de la courbe représentative \mathcal{C}_f en -1 et en $+\infty$.
6. Tracer la courbe représentative de f

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} = \exp\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ et C^1 sur \mathbb{R}_+^\times . Est-elle dérivable en 0 ?
2. Montrer que $\forall x \geq 0, \ln x \leq 1+x$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et préciser son signe. Préciser le sens de variations de f .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Etudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$. (On donnera un équivalent simple de $f(x) - x$)
4. Soit C la courbe représentative de f . Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 puis construire C et T dans un repère orthonormé (on admettra que T est en dessous de C au voisinage du point de contact)