Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$

Exercice 2

1. Montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$. Retrouver ainsi la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$.
   En déduire un encadrement de $\dfrac{e^x-1}{x}$ et retrouver ainsi $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et retrouver ainsi $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 3
A l'aide d'un changement de variable adéquat, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(3x^2)}{x^6}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\exp(x^2)-1}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+2x^2)}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\exp(\dfrac{1}{x^2})-1)$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\ln(1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}})$

Exercice 4
Trouver les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0} \left[3x^2+(\ln x)^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\exp(x^2)-e^{3x}+x^2\right]$

c) $\lim\limits_{x\to0} \left[x\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})\right]$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+x^2\ln(x)}{(\ln x)^2+\ln(x^2)}$

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x^2)^x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{3}{x})^x$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x^2})^{\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to0} (1+\dfrac{1}{x^2})^{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2^x+3^x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2^x+3^x)^{1/x}$

Exercice 6
Déterminer les asymptotes en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a(x) = \dfrac{x^3+x\sqrt{x}+1}{x^2+\sqrt{x}+1}$ $b(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $c(x) = \dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$

$d(x) = \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$ $e(x) = \dfrac{x\ln x+\ln x}{\sqrt{x+1}}$ $f(x) = x^3\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

Exercice 7
Déterminer les asymptotes en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$a(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$ $b(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $c(x) = \dfrac{1+xe^x}{1+e^x}$ $d(x) = \ln(e^x+e^{-x})$

Exercice 8
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues en 0 ? Parmi celles qui sont continues en 0, lesquelles sont dérivables en 0 ? Dans ce cas, calculer la dérivée en 0.

$$a(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^3)}{3x^2} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \qquad d(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x}) & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Exercice 9

1. Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $\forall x\in[0,2], \quad f(x) = x\sqrt{2x-x^2}$.
   Montrer qu'elle est continue en 0 et en 2. Est-elle dérivable en 0 ? en 2 ?
2. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $\forall x\in[0,1], \quad g(x) = (x^2-x)\sqrt{x-x^2}$.
   Montrer qu'elle est continue en 0 et en 1. Est-elle dérivable dérivable en 0 ? en 1 ?
3. Soit h la fonction définie sur $[0,4]$ par $\forall x\in[0,4], \quad g(x) = (x-4)\sqrt{4x-x^2}$.
   Montrer qu'elle est continue en 0 et en 4. Est-elle dérivable dérivable en 0 ? en 4 ?

Exercice 10
A l'aide des théorèmes généraux sur les fonctions C^k, déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont continues (resp. C^1, resp. C^∞)

$a(x) = \ln(1+x^2)$ $b(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$ $c(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ $d(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

$e(x) = \exp(x+\dfrac{1}{x})$ $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$ $g(x) = \ln(2x^2-x-1)$ $h(x) = (1+x^2)^x$