**Exercice 1**
Montrer que récurrence que :

a) $\forall n \geqslant 0, \quad 1+3+5+\cdots+(2n+1)=n^2$ b) $\forall n \geqslant 3, \quad n! \geqslant 2\times 3^{n-2}$

c) $\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k\times 2^{k-1}=(n-1)2^n+1$ d) $\forall n \geqslant 5, \quad \dfrac{3^n}{n!} \leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

**Exercice 2**
Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $u$ la suite définie par $u_n=(1+\frac{a}{n})^n$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \ \dfrac{a}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
2. Montrer que la suite $u$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 3**
On considère la suite $u$ définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1}=2\sqrt{u_n}-1$ et $u_0=2$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$. Etudier la monotonie de la suite $u$ (on étudiera $u_n-u_{n+1}$)
2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

**Exercice 4**
Soit $u$ la suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$. En déduire la monotonie de $u$
2. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.
3. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

**Exercice 5**
Soit $u$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}$ et $u_0=3$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$ puis déterminer la monotonie de la suite $u$.
2. Justifier la convergence de la suite $u$ et expliciter sa limite.

**Exercice 6**
On considère la suite $u$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0=1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \dfrac{1}{3}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{6}$. En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$
3. Déduire des questions précédentes que la suite $u$ converge et donner sa limite.

**Exercice 7**
On considère la suite $u$ définie par $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $0<u_n \leqslant 2$. Quelles sont les limites éventuelles de $u$ ?
2. Montrer que $\forall x \in [0,2], \ 2-\sqrt{x+2} \leqslant \dfrac{2-x}{2\sqrt{2}}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \ 2-u_{n+1} \leqslant \dfrac{2-u_n}{2\sqrt{2}}$
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $2-u_n \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n}$. Conclure.

**Exercice 8**
Soit $u$ la suite définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n>0$.
2. Déterminer la monotonie de $u$ et les limites éventuelles de $u$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n^2 \geqslant 2n+u_0^2$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Exercice 9**
On définit deux suites $a$ et $b$ par $a_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ et $b_n=a_n+\dfrac{1}{n\times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.

**Exercice 10**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0<a<b$. On définit deux suites $u$ et $v$ par $u_0=a$, $v_0=b$ et $\forall n \geqslant 0$ $u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0<u_n<v_n$.
2. Donner la monotonie des suites $u$ et $v$
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+1}-u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2}$ puis $v_n-u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$.
4. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes.
5. Montrer que la suite $(u_nv_n)$ est constante.
   En déduire la limite commune des suites $u$ et $v$.