

Exercice 1 (Equation à paramètres)

On considère l'équation (E) suivante, où x et m sont deux réels.

$$(E) : mx^2 + x(2m - 1) - 2 = 0.$$

1. Pour m fixé, déterminer les réels x satisfaisant à l'équation (E).
2. Pour x fixé, déterminer les réels m satisfaisant à l'équation (E).

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{\exp(x^2)}{e^{2x}} \quad B = \exp(x^2 + 1) - (e^x)^2 \quad C = e^{3x} - e^{2x} - (e^x + 1)(e^{2x} - 1)$$

$$D = \frac{\ln 2x}{\ln x} \quad E = (\ln x)^2 - \ln(x^2) \quad F = \left[\exp\left(\frac{1}{2} \ln(x^2)\right) \right]^2$$

Exercice 3 (Les équations standards)

Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0 \quad (E_2) : (\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0 \quad (E_3) : x = \sqrt{x} + 2$$

$$(E_4) : e^x + e^{-x} = 2 \quad (E_5) : e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4 = 0$$

$$(E_6) : x^2 - 3x + 4 + \frac{8 - 6x}{x^2 - 2} = 0 \quad (E_7) : \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2$$

Exercice 4 (Résolution de systèmes)

Résoudre les équations suivantes :

$$(S_1) : \begin{cases} 7x + 13y = \frac{2}{3} \\ -x + 8y = 1 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} e^x + e^y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 (Principe d'identification)

1. Déterminer deux réels a et b tels que $a(x+1)(x+2) + b(x+2) = 3x^2 + 2x - 8$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x^2 + x}$.

3. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$$

4. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

Exercice 6 (Résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes

$$(I_1) : x^3 + 5x \leq 6x \quad (I_2) : \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leq 1 \quad (I_3) : \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

$$(I_4) : \ln(3x) \leq \ln(2x) \quad (I_5) : 3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8 \quad (I_6) : 5 \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$$

Exercice 7 (Dérivation)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$a(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \quad b(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad c(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

Exercice 8 (Inégalités et fonctions)

1. On pose $f(x) = \ln x - (x - 1)$.
Etudier les variations de f sur son domaine de définition.
En déduire que $\forall x \geq 1, \ln x \leq x - 1$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{b}$.
Déterminer le minimum de g sur \mathbb{R}_+^\times .
En déduire que $\forall x > 0, \frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq 2\sqrt{ab}$.
3. Démontrer que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x$ puis que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
4. Montrer que $\forall x \in]0, \frac{1}{e}[, -\frac{1}{e} < x \ln x < 0$.