correction de l'exercice 1

1. La famille a un moins garçon signifie qu'elle en a un ou deux ou trois .... donc, les évènements (A_i) étant deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned} q &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} p^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \\ &= \frac{1}{2}\left(p + p^2 + \cdots\right) = \frac{p}{2}(1 + p + \cdots) = \frac{p}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{p}{2} \times \frac{1}{1-p} = \frac{p}{2(1-p)} \\ q_0 &= 1 - q = 1 - \frac{p}{2(1-p)} = \frac{2-3p}{2(1-p)} \end{aligned}$$

2. Il est immédiat que l'on se situe dans le schéma binômial donc la probabilité recherchée est égale à

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

3. Le nombre de garçons dans la famille dépend bien entendu du nombre d'enfants de la famille. En considèrant le système complet d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} P(G_k) &= P(G_k \cap A_0) + P(G_k \cap A_1) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} P(G_k \cap A_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(G_k \cap A_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(G_k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2} p^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}} \end{aligned}$$

Justification des calculs : *Etant donné que l'on ne peut avoir strictement plus de garçons que d'enfants dans la famille, l'évènement* $G_k \cap A_n$ *est vide lorsque* $k > n \Leftrightarrow n < k$.
D'autre part, la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(G_k)$ *est la probabilité d'avoir* k *garçons lorsque la famille a* n *enfants. Puisque* $n \geqslant k \geqslant 1$, *cette probabilité conditionnelle est donc égale à* $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ *(cf. question 2)*

4. En utilisant l'évènement contraire, on a

$$\begin{aligned} P(G_0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(G_k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2\left(1 - \frac{p}{2}\right)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}}\right)^k \\ &= 1 - \frac{1}{2-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{2-p}\right)^k = 1 - \frac{1}{2-p}\left[\frac{p}{2-p} + \left(\frac{p}{2-p}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2-p} \times \frac{p}{2-p}\left[1 + \frac{p}{2-p} + \cdots\right] = 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{2-p}\right)^k \\ &= 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{p}{2-p}} = 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \times \frac{2-p}{2-2p} = 1 - \frac{p}{2(2-p)(1-p)} = \frac{2p^2 - 7p + 4}{2(2-p)(1-p)} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

Loi de X : Il est immédiat que $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ (il faut au moins deux pioches pour obtenir deux couleurs distinctes) et pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P[\left(C_1 \cap \cdots \cap C_1 \cap \overline{C_1}\right) \cup \left(C_2 \cap \cdots \cap C_2 \cap \overline{C_2}\right) \cup \left(C_3 \cap \cdots \cap C_3 \cap \overline{C_3}\right)] \\ &= P\left(\overbrace{\underbrace{C_1 \cap \cdots \cap C_1}_{n-1 \text{ fois}} \cap \overline{C_1}}^{n \text{ lancers}}\right) + P\left(\overbrace{\underbrace{C_2 \cap \cdots \cap C_2}_{n-1 \text{ fois}} \cap \overline{C_2}}^{n \text{ lancers}}\right) + P\left(\overbrace{\underbrace{C_3 \cap \cdots \cap C_3}_{n-1 \text{ fois}} \cap \overline{C_3}}^{n \text{ lancers}}\right) \end{aligned}$$

en utilisant le fait qu'il s'agit d'une union disjointe. Ensuite, puisque les évènements (C_i) sont mutuellement indépendants, on en déduit les égalités suivantes

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \overbrace{\underbrace{P(C_1)\cdots P(C_1)}_{n-1 \text{ fois}} P(\overline{C_1})}^{n \text{ lancers}} + \overbrace{\underbrace{P(C_2)\cdots P(C_2)}_{n-1 \text{ fois}} P(\overline{C_2})}^{n \text{ lancers}} + \overbrace{\underbrace{P(C_3)\cdots P(C_3)}_{n-1 \text{ fois}} P(\overline{C_3})}^{n \text{ lancers}} \\ &= (p_1)^{n-1}(1-p_1) + (p_2)^{n-1}(1-p_2) + (p_3)^{n-1}(1-p_3) \end{aligned}$$

Espérance de X : La variable aléatoire X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n)$ converge. Puisque l'on a

$$\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n) = (1-p_1)\sum_{n\geqslant 2} n(p_1)^{n-1} + (1-p_2)\sum_{n\geqslant 2} n(p_2)^{n-1} + (1-p_3)\sum_{n\geqslant 2} n(p_3)^{n-1},$$

on en déduit, par combinaison linéaire de séries convergentes (car les réels p_i appartiennent à $]0,1[\subset]-1,1[$), que la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n)$ converge donc X admet une espérance. Il est dès lors immédiat que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) = (1-p_1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(p_1)^{n-1} + (1-p_2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(p_2)^{n-1} + (1-p_3)\sum_{n=2}^{+\infty} n(p_3)^{n-1} \\
&= (1-p_1)\left[-1\times(p_1)^{1-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(p_1)^{n-1}\right] + (1-p_2)\left[-1\times(p_2)^{1-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(p_2)^{n-1}\right] \\
&\quad +(1-p_3)\left[-1\times(p_3)^{1-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(p_3)^{n-1}\right] \\
&= (1-p_1)\left[-1+\frac{1}{(1-p_1)^2}\right] + (1-p_2)\left[-1+\frac{1}{(1-p_2)^2}\right] + (1-p_3)\left[-1+\frac{1}{(1-p_3)^2}\right] \\
&= -(1-p_1+1-p_2+1-p_3) + \frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} + \frac{1}{1-p_3} \\
&= -(3-1) + \frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} + \frac{1}{1-p_3} = \frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} + \frac{1}{1-p_3} - 2
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 3

On considère P_k (resp. F_k) l'évènement " obtenir Pile au k-ième lancer " (resp. " obtenir Face au k-ème lancer "). Pour éviter des notations trop lourdes, on notera PPF l'évènement $P_1\cap P_2\cap F_3$.

1. Loi de X : $X(\Omega)=\mathbb{N}^\times$ (il faut au moins un lancer pour obtenir Face !) et

$$\forall n\in\mathbb{N}^\times,\quad p(X=n) = p(\overbrace{\underbrace{P\cdots P}_{n-1 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) = p(P)...p(P)p(F) = a^{n-1}(1-a)$$

Loi de Y : $Y(\Omega)=\mathbb{N}^\times$ (il faut au moins un lancer pour obtenir Face !) et

$$\forall n\in\mathbb{N}^\times,\quad p(Y=n) = p(\overbrace{\underbrace{P\cdots P}_{n-1 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) = p(P)...p(P)p(F) = b^{n-1}(1-b)$$

Espérance de X : La variable X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 1} nP(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} na^{n-1}(1-a) = (1-a)\sum_{n\geqslant 0} na^{n-1}$ converge, ce qui est le cas car $a\in]0,1[\subset]-1,1[$ et l'on a

$$E(X) = (1-a)\sum_{n=0}^{+\infty} na^{n-1} = (1-a)\times\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a}$$

2. L'évènement $(X=Y)$ s'écrit aussi

$$(X=Y) = (X=1\cap Y=1)\cup(X=2\cap Y=2)\cup\cdots = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X=n\cap Y=n)$$

L'union étant disjointe et les variables X et Y étant indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n\cap Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}(1-a)b^{n-1}(1-b) \\
&= (1-a)(1-b)\sum_{n=1}^{+\infty}(ab)^{n-1} = (1-a)(1-b)\left(1+(ab)+(ab)^2+\cdots\right) \\
&= (1-a)(1-b)\sum_{n=0}^{+\infty}(ab)^n = (1-a)(1-b)\times\frac{1}{1-ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}
\end{aligned}$$

Interprétation : La probabilité que chaque joueur obtienne pile pour la première fois au même lancer est égale à
$$\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}.$$

3. $\underline{P(X>k)}$: L'évènement $(X>k)$ s'écrit encore
$$(X>k)=(X=k+1)\cup(X=k+2)\cup\cdots=\bigcup_{n=k+1}^{+\infty}(X=n)$$
L'union étant disjointe, on en déduit que
$$\begin{aligned}P(X>k) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty}P(X=n)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}a^{n-1}(1-a)=(1-a)\sum_{n=k+1}^{+\infty}a^{n-1}=(1-a)\left(a^k+a^{k+1}+\cdots\right)\\ &= (1-a)a^k(1+a+\cdots)=(1-a)a^k\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=(1-a)a^k\times\frac{1}{1-a}=a^k\end{aligned}$$
$\underline{P(X>Y)}$: On introduit naturellement le système complet d'évènements
$$\{(Y=1),(Y=2),...\}=\left\{(Y=n),\quad n\in\mathbb{N}^\times\right\}$$
Ensuite, la réalisation de l'évènement $[(X>Y)\cap(Y=n)]$ implique bien entendu la réalisation de l'évènement $(X>n)\cap(Y=n)$, la réciproque étant évidente (remarquez que l'on ne peut pas dire que les évènements $[(X>Y)\cap(Y=n)]$ et $(X>n)$ sont identiques car ce dernier ne donne aucune information sur Y). Dès lors, en tenant compte que les variables X et Y sont indépendantes, on en déduit que
$$\begin{aligned}P(X>Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty}P[(X>Y)\cap(Y=n)]=\sum_{n=1}^{+\infty}P[(X>n)\cap(Y=n)]=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X>n)P(Y=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}a^nb^{n-1}(1-b)=\frac{1-b}{b}\sum_{n=1}^{+\infty}a^nb^n=\frac{1-b}{b}\sum_{n=1}^{+\infty}(ab)^n=\frac{1-b}{b}\left[(ab)+(ab)^2+\cdots\right]\\ &= \frac{1-b}{b}\times(ab)\left[1+(ab)+\cdots\right]=(1-b)a\sum_{n=0}^{+\infty}(ab)^n=\frac{a(1-b)}{1-ab}\end{aligned}$$
$\underline{P(X\geqslant Y)}$: Etant donné que les évènements $(X\geqslant Y)$ et $(X>Y)\cup(X=Y)$ sont identiques et que cette union est disjointe, on en déduit que
$$P(X\geqslant Y)=P(X>Y)+P(X=Y)=\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}+\frac{a(1-b)}{1-ab}=\frac{1-b}{1-ab}$$
Interprétation : La probabilité que le joueur A obtienne son premier pile avant (strictement) le joueur B est égale à $\dfrac{a(1-b)}{1-ab}$ et la probabilité que le joueur A obtienne son premier pile avant (au sens large) le joueur B est égale à $\dfrac{1-b}{1-ab}$

4. $\underline{P(M\geqslant k)}$: L'évènement $(M\geqslant k)$ s'écrit aussi $(X\geqslant k)\cap(Y\geqslant k)$. Les variables X et Y étant indépendantes, on a
$$\forall k\in\mathbb{N}^\times,\quad P(M\geqslant k)=P[(X\geqslant k)\cap(Y\geqslant k)]=P(X\geqslant k)P(Y\geqslant k)=a^kb^k=(ab)^k$$
On en déduit alors que
$$\forall k\in\mathbb{N}^\times,\quad P(M=k)=P(M\geqslant k)-P(M\geqslant k+1)=(ab)^k-(ab)^{k+1}=(ab)^k(1-ab)$$
ce qui signifie que la variable $M=\min(X,Y)$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(ab)$.

5. Puisque X et Y prennent des valeurs entières supérieures ou égales à 1, on en déduit que $U(\Omega)=\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
Remarque : On peut faire le tableau à deux entrées X et Y pour voir les premières valeurs de $X+Y=U$
Ensuite, en remarquant que $X+Y=n$ ssi $\{(X=1)$ et $(Y=n-1)\}$ ou $\{(X=2)$ et $(Y=n-2)\}$ ou ... ou $\{(X=n-1)$ et $(Y=1)\}$, les événements précédents étant deux à deux incompatibles et les variables X et Y étant indépendantes, on obtient
$$\begin{aligned}P(U=n) &= P[(X=1)\cap(Y=n-1)]+\cdots+P[(X=n-1)\cap(Y=1)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}P[(X=k)\cap(Y=n-k)]=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)P(Y=n-k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}a^{k-1}(1-a)b^{(n-k-1)}(1-b)=(1-a)(1-b)a^{-1}b^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{-k}=(1-a)(1-b)a^{-1}b^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k\end{aligned}$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas :
Premier cas $\frac{a}{b} \neq 1 \Leftrightarrow a \neq b$:

$$\begin{aligned} P(U=n) &= (1-a)(1-b)a^{-1}b^{n-1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\cdots+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\right] = (1-a)(1-b)a^{-1}b^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)+\cdots+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}\right] \\ &= (1-a)(1-b)b^{n-2}\times\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}}{1-\frac{a}{b}} = (1-a)(1-b)b^{n-2}\frac{\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{b^{n-1}}}{\frac{b-a}{b}} = (1-a)(1-b)\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{b-a} \end{aligned}$$

Deuxième cas $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$:

$$P(U=n) = (1-a)(1-a)a^{-1}a^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} 1 = (1-a)^2a^{n-2}(n-1)$$

Conclusion : la loi de U est donnée par

$$U(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(U=n) = \begin{cases} (1-a)(1-b)\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{b-a} & \text{si} \quad a \neq b \\ (1-a)^2a^{n-2}(n-1) & \text{si} \quad a = b \end{cases}$$

$P_{(U=j)}(Y=k)$: L'évènement $(U=j)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(Y=k)$. Puisque l'on a d'une part $U = X+Y$ et, d'autre part, les variables X et Y prennent des valeurs entières non nulles, on en déduit que l'évènement $(Y=k)$ se réalise seulement si $k < j$ donc la probabilité conditionnelle $P_{(U=j)}(Y=k)$ est nulle lorsque $k \geqslant j$. On suppose désormais $k \geqslant j$. Etant donné que l'on ne peut réinterpréter convenablement cette probabilité conditionnelle, on utilise la définition mathématique d'une probabilité conditionnelle, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P_{(U=j)}(Y=k) &= \frac{P[(U=j)\cap(Y=k)]}{P(U=j)} = \frac{P[(X+Y=j)\cap(Y=k)]}{P(U=j)} = \frac{P[(X=j-k)\cap(Y=k)]}{P(U=j)} \\ &= \frac{P(X=j-k)P(Y=k)}{P(U=j)} \end{aligned}$$

Ainsi, en distinguant les cas $a \neq b$ et $a = b$, on a

$$P_{(U=j)}(Y=k) = \begin{cases} \frac{a^{j-k-1}(1-a)b^{k-1}(1-b)}{(1-a)(1-b)\frac{b^{j-1}-a^{j-1}}{b-a}} = \frac{a^{j-k-1}b^{k-1}(b-a)}{b^{j-1}-a^{j-1}} & \text{si} \quad a \neq b \\ \frac{a^{j-k-1}(1-a)a^{k-1}(1-a)}{(1-a)^2a^{j-2}(j-1)} = \frac{1}{j-1} & \text{si} \quad a = b \end{cases}$$

Conclusion :

$$P_{(U=j)}(Y=k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \leqslant k \\ \frac{a^{j-k-1}(1-a)b^{k-1}(1-b)}{(1-a)(1-b)\frac{b^{j-1}-a^{j-1}}{b-a}} = \frac{a^{j-k-1}b^{k-1}(b-a)}{b^{j-1}-a^{j-1}} & \text{si} \quad j > k \text{ et } a \neq b \\ \frac{a^{j-k-1}(1-a)a^{k-1}(1-a)}{(1-a)^2a^{j-2}(j-1)} = \frac{1}{j-1} & \text{si} \quad j > k \text{ et } a = b \end{cases}$$

6. Univers-image de D : Manifestement, la variable D prend des valeurs entières positives. En outre, elle prend toutes les valeurs entières positives car si $n \in \mathbb{N}$, alors lorsque $X = n+1$ et $Y = 1$ alors $D = |n+1-1| = n$ donc $D(\Omega) = \mathbb{N}$.
Puisque $a = b = \frac{1}{2}$, la loi de X et de Y est donnée par

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X=n) = P(Y=n) = \frac{1}{2^n}$$

$P(D=0)$: En utilisant la question 2, on obtient

$$P(D=0) = P(|X-Y|) = 0 = P(X=Y) = \frac{1}{3}$$

$\underline{P(D=1)}$: En se rappelant que $|z|=1 \Leftrightarrow z=1$ ou $z=-1$, les calculs suivants nous donnent

$$\begin{aligned}
P(D=1) &= P(|X-Y|=1) = P[(X-Y=1)\cup(X-Y=-1)] = P(X-Y=1)+P(X-Y=-1) \\
&= P(X=Y+1)+P(X=Y-1) \\
&= \{P((Y=1)\cap(X=2))+P((Y=2)\cap(X=3))+\cdots\} \\
&\quad +\{P((Y=2)\cap(X=1))+P((Y=3)\cap(X=2))+\cdots\} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Y=n)\cap(X=n+1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} P[(Y=n+1)\cap(X=n)] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n)P(X=n+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n+1)P(X=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots \\
&= \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}+\cdots\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Loi de D : Nous venons de montrer que $P(D=0)=\dfrac{1}{3}$. Soit un entier $n\in\mathbb{N}^\times$ (donc $-n\neq n$) on a

$$\begin{aligned}
P(D=n) &= P(|X-Y|=n) = P(X-Y=n)+P(X-Y=-n) = P(X=Y+n)+P(X=Y-n) \\
&= \{P[(Y=1)\cap(X=n+1)]+P[(Y=2)\cap(X=n+2)]\} \\
&\quad +\{P[(Y=n+1)\cap(X=1)]+P[(Y=n+2)\cap(X=2)]\} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P[(Y=k)\cap(X=n+k)] + \sum_{k=1}^{+\infty} P[(Y=n+k)\cap(X=k)] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)P(X=n+k) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=n+k)P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{2^{n+k}} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+k}}\times\frac{1}{2^n} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k+n}} = \frac{2}{2^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^k = \frac{2}{2^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de D est donnée par

$$D(\Omega)=\mathbb{N} \quad\text{et}\quad P(D=0)\forall n\in\mathbb{N},\quad P(D=n)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \text{si}\quad n=0\\[2mm] \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{si}\quad n\geqslant 1\end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}P(D=n) &= P(D=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}P(D=n) = \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{-1}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\right] = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots\right] = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1
\end{aligned}$$

Espérance de D : La variable aléatoire D admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 0} nP(D=n)$ converge, ce qui est le cas car

$$\sum_{n\geqslant 0} nP(D=n) = \sum_{n\geqslant 1} nP(D=n) = \sum_{n\geqslant 1} n\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

et $\dfrac{1}{2}\in]0,1[\subset]-1,1[$. On en déduit immédiatement que

$$E(D) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

Remarque : la variable D représente le nombre de tirages entre l'obtention du premier Face par A et par B (A puis B ou B puis A). Dès lors, il y a, en moyenne, 1,33 lancers entre l'obtention du premier Face par A et par B.

correction de l'exercice 4

On considère P_k (resp. F_k) l'évènement " obtenir Pile au k-ième lancer " (resp. " obtenir Face au k-ème lancer "). Pour éviter des notations trop lourdes, on notera PPF l'évènement $P_1 \cap P_2 \cap F_3$.
On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir "pile" est p. On lance indéfiniment la pièce et on note T la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF.

1. $\underline{P(T=2)}$:
$$P(T=2) = P(PF) = P(P)P(F) = p(1-p)$$
$\underline{P(T=3)}$:
$$P(T=3) = P\left[(FPP) \cup (FPF)\right] = P(PPF) + P(FFP) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$$
$\underline{P(T=4)}$:
$$P(T=4) = P\left[(PPPF) \cup (FPPF) \cup (FFPF)\right] = p^3(1-p) + (1-p)^2p^2 + (1-p)^3 p$$

2. Aux lancers $n-1$ et n, on doit nécessairement avoir la séquence PF (c'est la première fois qu'elle apparait). Dans les lancers précédents, aucun Pile ne peut être suivi de Face (sinon la séquence PF) apparait avant le lancer n. On en déduit que si un Pile apparait dans les $n-2$ premiers lancers, alors il est suivi nécessairement de Piles jusqu'au lancer $n-1$ inclus, ce qui nous donne
$$(T=n) = (\overbrace{\underbrace{P\cdots P}_{n-1 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup (\overbrace{\underbrace{F}_{1 \text{ fois}}\underbrace{P\cdots P}_{n-2 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup (\overbrace{\underbrace{FF}_{2 \text{ fois}}\underbrace{P\cdots P}_{n-3 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup \cdots \cup (\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{n-2 \text{ fois}}PF}^{n \text{ lancers}}) = \bigcup_{k=0}^{n-2} (\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-k-1 \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}})$$

3. $\underline{\text{Loi de } T}$: Il est évident que $T(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ (il faut 2 lancers pour avoir une séquence PF !!). D'autre part, l'utilisation de la question 2 nous donne directement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,
$$\begin{aligned}
P(T=n) &= P\left[\bigcup_{k=0}^{n-2}(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-1-k \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}})\right] = \sum_{k=0}^{n-2} P(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-1-k \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}}) = \sum_{k=0}^{n-2}(1-p)^{k+1}p^{n-k-1} \\
&= (1-p)p^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}(1-p)^k p^{-k} = (1-p)p^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{p}\right)^k \\
&= \begin{cases} (1-p)p^{n-1}\dfrac{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1-p}{p}} & \text{si } \dfrac{1-p}{p} \neq 1 \Leftrightarrow p \neq \dfrac{1}{2} \\ (1-p)p^{n-1}(n-1) = (n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } \dfrac{1-p}{p} = 1 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$
$\underline{\text{Espérance de } T}$: la variable T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n)$ converge. Etant donné que la loi de T est donnée par deux formules distinctes selon la valeur de p, nous allons distinguer les deux cas.
$\boxed{\text{Premier cas } p \neq \frac{1}{2}}$:
$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 2} nP(T &= n) = \sum_{n\geqslant 2} n(1-p)p^{n-1}\frac{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1-p}{p}} = \frac{1-p}{1-\dfrac{1-p}{p}}\sum_{n\geqslant 2} n\left[p^{n-1} - p^{n-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{p(1-p)}{2p-1}\sum_{n\geqslant 2} n\left[p^{n-1} - (1-p)^{n-1}\right] = \frac{p(1-p)}{2p-1}\left[\sum_{n\geqslant 2} np^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} n(1-p)^{n-1}\right] \\
&= \frac{p(1-p)}{2p-1}\sum_{n\geqslant 2} np^{n-1} - \frac{p(1-p)}{2p-1}\sum_{n\geqslant 2} n(1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n)$ est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[\subset]-1,1[$) donc T admet une espérance et l'on a :

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) = \frac{p(1-p)}{2p-1}\sum_{n=2}^{+\infty} np^{n-1} - \frac{p(1-p)}{2p-1}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} np^{n-1} - 1\times p^{1-1}\right) - \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} - 1\times(1-p)^{1-1}\right) \\
&= \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right) - \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\frac{1}{(1-(1-p))^2}-1\right) = \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right) - \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\frac{1}{p^2}-1\right) \\
&= \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(\frac{1}{(1-p)^2}-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{p(1-p)}{2p-1}\times\frac{p^2-(1-p)^2}{p^2(1-p)^2} = \frac{1}{2p-1}\times\frac{2p-1}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Deuxième cas } p=\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n)$ est convergente ($\frac{1}{2}$ appartient à $]-1,1[$) donc T admet une espérance et l'on a :

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 5

1. $\underline{P(X=1)}$: L'évènement $(X=1)$ est impossible (obtenir PF en un lancer relève de Mission Impossible, même si l'impossible n'est pas français ! :-)) donc $P(X=1)=0$.
   $\underline{P(X=2)}$: $P(X=2)=P(PP)=p^2$
   $\underline{P(X=3)}$: $P(X=3)=P(FPP)=p^2q$
   $\underline{P(X=4)}$: $P(X=4)=P(FFPP)+P(PFPP)=q^2p^2+p^3q=p^2q(q+p)=p^2q$

2. $\underline{P_{(P_1)}(X=n)}$: L'évènement (P_1) est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=n)$, autrement dit, on a obtenu Pile au premier lancer et on souhaite obtenir pour la première fois la séquence PP pour la première fois au n-ième lancer. Il reste donc $n-1$ lancers à accomplir et, en ces $n-1$ lancers, on doit obtenir la séquence PP pour la première fois aux deux derniers de ces $n-1$ lancers. Etant donné que l'on ne peut obtenir Pile au second lancer (sinon, la séquence PP apparait en deux lancers et non en n lancers ($n\geqslant 3$)), on est obligé d'obtenir Face au deuxième lancer et la séquence PP doit apparaitre au dernier lancer des $n-2$ lancers restants, ce qui nous donne

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{P}}_{\text{lancer } n^\circ 1}\quad\underbrace{F}_{\text{lancer } n^\circ 2}\quad\underbrace{\cdots PP}_{n-2 \text{ lancers restants}}}^{n \text{ lancers}}$$

Par conséquent, on a

$$P_{(P_1)}(X=n) = P(F_2\cap(X=n-2)) = P(F_2)P(X=n-2) = qP(X=n-2)$$

$\underline{P_{(F_1)}(X=n)}$: L'évènement (F_1) est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=n)$, autrement dit, on a obtenu Face au premier lancer et on souhaite obtenir pour la première fois la séquence PP pour la première fois au n-ième lancer. Il reste donc $n-1$ lancers à accomplir et, en ces $n-1$ lancers, on doit obtenir la séquence PP pour la première fois aux deux derniers de ces $n-1$ lancers. Aucune contrainte n'exigible sur le second lancer donc la séquence PP doit apparaitre au dernier lancer des $n-1$ lancers restants, ce qui nous donne

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{F}}_{\text{lancer } n^\circ 1}\quad\underbrace{\cdots PP}_{n-1 \text{ lancers restants}}}^{n \text{ lancers}}$$

Par conséquent, on a

$$P_{(F_1)}(X=n) = P(X=n-1)$$

3. En utilisant le système complet d'évènements (P_1, F_1), la formule des probabilités totales nous donne, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P(P_1 \cap (X=n)) + P(F_1 \cap (X=n)) = P(P_1)P_{(P_1)}(X=n) + P(F_1)P_{(F_1)}(X=n) \\ &= pqP(X=n-2) + qP(X=n-1) \end{aligned}$$

4. (a) D'après la question 3, on a

$$\forall n \geqslant 3, \quad P(X=n) = \frac{1}{3}P(X=n-1) + \frac{2}{9}P(X=n-2)$$

et, en admettant que X admet une espérance, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) = 2P(X=2) + \sum_{n=3}^{+\infty} nP(X=n) = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}P(X=n-1) + \frac{2}{9}P(X=n-2)\right) \\ &= \frac{8}{9} + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n-1) + \frac{2}{9}\sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n-2) = \frac{8}{9} + \underbrace{\frac{1}{3}\sum_{j=2}^{+\infty}(j+1)P(X=j)}_{j=n-1} + \underbrace{\frac{2}{9}\sum_{j=1}^{+\infty}(j+2)P(X=j)}_{j=n-2} \\ &= \frac{8}{9} + \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{+\infty} jP(X=j) + \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{+\infty} P(X=j) + \frac{2}{9}\sum_{j=1}^{+\infty} jP(X=j) + \frac{4}{9}\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j) \end{aligned}$$

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, la probabilité $P(X=1)$ est nulle et l'on a $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=j) = 1$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{8}{9} + \underbrace{\frac{1}{3}\sum_{j=2}^{+\infty} jP(X=j)}_{=E(X)} + \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{2}{9}\sum_{j=2}^{+\infty} jP(X=j)}_{=E(X)} + \frac{4}{9} = \frac{15}{9} + \frac{5}{9}E(X) \\ \Leftrightarrow \quad & E(X) = \frac{15}{9} + \frac{5}{9}E(X) \Leftrightarrow \frac{4}{9}E(X) = \frac{15}{9} \Leftrightarrow E(X) = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

(b) D'après la question 3, la suite $(P(X=n))_{n \geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il existe donc deux constantes α et β telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(X=n) = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En utilisant les valeurs de $P(X=1)$ et $P(X=2)$ obtenues à la question 1, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = P(X=1) = 0 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = P(X=2) = \frac{4}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \times \frac{2}{3} - \beta \times \frac{1}{3} = 0 \\ \alpha \times \frac{4}{9} + \beta \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha = \frac{2}{3} & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \beta = \frac{4}{3} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, la loi de X est donné par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(X=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

(c) $\underline{E(X)}$: La variable X admet une espérance car la série $\sum_{n \geqslant 2} nP(X=n)$ converge. En effet, l'égalité

$$\sum_{n \geqslant 2} nP(X=n) = \sum_{n \geqslant 2} n\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\sum_{n \geqslant 2} n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\sum_{n \geqslant 2} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

montre que cette série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ appartiennent à $]-1,1[$). On peut donc utiliser la question 4.3, ce qui montre que $E(X)=\frac{15}{4}$.

$\underline{E(X(X-1))}$: La variable $X(X-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)P(X=n)$ converge. L'égalité suivante

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)P(X &= n)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)P(X=n)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

montre que cette série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ appartiennent à $]-1,1[$) et l'on a

$$\begin{aligned}E[X(X-1)] &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}+\frac{4}{3}\times\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}=\frac{129}{8}\end{aligned}$$

$\underline{V(X)}$: Les variables X et $X(X-1)$ admettent une espérance donc la variable $X+X(X-1)=X^2$ admet également une espérance et comme X admet aussi une espérance, on en déduit que la variable X admet une variance et l'on a

$$\begin{aligned}E(X^2) &= E[X+X(X-1)]=E(X)+E[X(X-1)]=\frac{15}{4}+\frac{129}{8}=\frac{159}{8}\\ V(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{159}{8}-\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{93}{16}\end{aligned}$$