correction de l'exercice 1

1. Loi de B : Bien entendu, les tirages étant sans remise, on ne peut piocher plus de 2 boules blanches donc $B(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et

$$P(B=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} \quad P(B=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} \quad P(B=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0,2]\!], \quad P(B=k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

Justification du calcul de probabilité :
$P(B=k)$: L'évènement $(B=k)$ signifie que l'on doit piocher k boules blanche (donc $5-k$ boules noires) lors de 5 pioches sans remise. Pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 2 blanches ($\binom{2}{k}$ choix), les $5-k$ autres boules sont choisis parmi les 8 boules noires ($\binom{8}{5-k}$ choix) et pour les cas possibles, on choisit 5 boules parmi les 10 présentes dans l'urne ($\binom{10}{5}$ choix) donc $P(B=k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$

Vérification :$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$

$$E(B) = \sum_{k=0}^{2} kP(B=k) = \frac{5}{9} + 2\times\frac{2}{9} = 1 \quad E(B^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2P(B=k) = \frac{5}{9} + 2^2\times\frac{2}{9} = \frac{13}{9} \quad V(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{4}{9}$$

Loi de N : Bien entendu, on ne peut obtenir plus de boules noires et le plus petit nombre de boules noires piochées est obtenu lorsque l'on a pioché les deux boules blanches, c'est-à-dire que l'on pioche au moins 3 boules noires. Par conséquent, $N(\Omega) = [\![3, 5]\!]$ et

$$P(N=3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} \quad P(N=4) = \frac{\binom{8}{4}\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} \quad P(N=5) = \frac{\binom{8}{5}\binom{2}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![3,5]\!], \quad P(N=k) = \frac{\binom{8}{k}\binom{2}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

Justification du calcul de probabilité :
$P(N=k)$: L'évènement $(B=k)$ signifie que l'on doit piocher k boules noires (donc $5-k$ boules blanches) lors de 5 pioches sans remise. Pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 8 noires ($\binom{8}{k}$ choix), les $5-k$ autres boules sont choisis parmi les 2 boules blanches ($\binom{2}{5-k}$ choix) et pour les cas possibles, on choisit 5 boules parmi les 10 présentes dans l'urne ($\binom{10}{5}$ choix) donc $P(N=k) = \frac{\binom{8}{k}\binom{2}{5-k}}{\binom{10}{5}}$

Vérification : $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{k=3}^{5} kP(N=k) = 3\times\frac{2}{9} + 4\times\frac{5}{9} + 5\times\frac{2}{9} = 4 \\ E(N^2) &= \sum_{k=3}^{5} k^2P(N=k) = 3^2\times\frac{2}{9} + 4^2\times\frac{5}{9} + 5^2\times\frac{2}{9} = \frac{148}{9} \\ V(N) &= E(N^2) - [E(N)]^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Indépendance de B et N : A priori, les variables B et N ne sont pas indépendantes puisque la connaissance du nombre de boules blanches fournit la connaissance du nombre de boules noires. Mais nous savons que l'indépendance logique n'est pas équivalente à l'indépendance probabiliste (aucune d'entre elle n'implique l'autre en général). Néanmoins, cela nous donne un début d'intuition et l'on va considérer les évènements $(B=0)$ et $(N=3)$. Il est évident que $(B=0)\cap(N=3)$ est impossible puisqu'il signifie qu'en piochant cinq boules, on obtient 0 boule blanche et 3 boules noires donc $P(B=0\cap N=3) = 0$. D'autre part, d'après les calculs précédents $P(B=0)P(N=3) = \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}$ donc $P(B=0\cap N=3) \neq P(B=0)P(N=3)$, ce qui implique les variables B et N ne sont pas indépendantes.

2. Loi de B : Les tirages étant avec remise, on peut avoir autant de boules blanches que l'on souhaite donc $B(\Omega) = [\![0,5]\!]$

$$\begin{aligned}
P(B=0) &= \binom{5}{0}\left(\frac{2}{10}\right)^0\left(\frac{8}{10}\right)^5 = \frac{1024}{3125}, \quad P(B=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{10}\right)^1\left(\frac{8}{10}\right)^4 = \frac{256}{625}\\
P(B=2) &= \binom{5}{2}\left(\frac{2}{10}\right)^2\left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{128}{625} \quad P(B=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{32}{625}\\
P(B=4) &= \binom{5}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^4\left(\frac{8}{10}\right)^1 = \frac{4}{625} \quad P(B=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5\left(\frac{8}{10}\right)^0 = \frac{1}{3125}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0,5]\!], \quad P(B=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{5-k}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(B=k)$: L'évènement $(B=k)$ signifie que l'on doit piocher k boules blanches (donc $5-k$ boules noires) lors de cinq pioches avec remise. On choisit donc k pioches parmi les 5 pioches possibles ($\binom{5}{k}$ choix), la probabilité que ces k pioches fournissent k boules blanches est égale à $\left(\frac{2}{10}\right)^k$ et la probabilité que les $5-k$ pioches restantes fournissent $5-k$ boules noires est égale à $\left(\frac{8}{10}\right)^{5-k}$ donc $P(B=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{5-k}$

Vérification : $\frac{1024}{3125} + \frac{256}{625} + \frac{128}{625} + \frac{32}{625} + \frac{4}{625} + \frac{1}{3125} = 1$

$$\begin{aligned}
E(B) &= \sum_{k=0}^{5} kP(B=k) = \frac{256}{625} + 2\times\frac{128}{625} + 3\times\frac{32}{625} + 4\times\frac{4}{625} + 5\times\frac{1}{3125} = 1\\
E(B^2) &= \sum_{k=0}^{5} k^2P(B=k) = \frac{256}{625} + 2^2\times\frac{128}{625} + 3^2\times\frac{32}{625} + 4^2\times\frac{4}{625} + 5^2\times\frac{1}{3125} = \frac{9}{5}\\
V(B) &= E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Loi de N : Les tirages étant avec remise, on peut avoir autant de boules blanches que l'on souhaite donc $N(\Omega) = [\![0,5]\!]$

$$\begin{aligned}
P(N=0) &= \binom{5}{0}\left(\frac{8}{10}\right)^0\left(\frac{2}{10}\right)^5 = \frac{1}{3125}, \quad P(N=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{8}{10}\right)^1\left(\frac{2}{10}\right)^4 = \frac{4}{625}\\
P(N=2) &= \binom{5}{2}\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{32}{625} \quad P(N=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{8}{10}\right)^3\left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{128}{625}\\
P(N=4) &= \binom{5}{4}\left(\frac{8}{10}\right)^4\left(\frac{2}{10}\right)^1 = \frac{256}{625} \quad P(N=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{8}{10}\right)^5\left(\frac{2}{10}\right)^0 = \frac{1024}{3125}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0,5]\!], \quad P(N=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{8}{10}\right)^k\left(\frac{2}{10}\right)^{5-k}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(N=k)$: L'évènement $(N=k)$ signifie que l'on doit piocher k boules noires (donc $5-k$ boules blanches) lors de cinq pioches avec remise. On choisit donc k pioches parmi les 5 pioches possibles ($\binom{5}{k}$ choix), la probabilité que ces k pioches fournissent k boules noires est égale à $\left(\frac{8}{10}\right)^k$ et la probabilité que les $5-k$ pioches restantes fournissent $5-k$ boules blanches est égale à $\left(\frac{2}{10}\right)^{5-k}$ donc $P(N=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{8}{10}\right)^k\left(\frac{2}{10}\right)^{5-k}$

Vérification : $\frac{1}{3125} + \frac{4}{625} + \frac{32}{625} + \frac{128}{625} + \frac{256}{625} + \frac{1024}{3125} = 1$

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=0}^{5} kP(N=k) = 1\times\frac{4}{625} + 2\times\frac{32}{625} + 3\times\frac{128}{625} + 4\times\frac{256}{625} + 5\times\frac{1024}{3125} = 4\\
E(N^2) &= \sum_{k=0}^{5} k^2P(N=k) = 1^2\times\frac{4}{625} + 2^2\times\frac{32}{625} + 3^2\times\frac{128}{625} + 4^2\times\frac{256}{625} + 5^2\times\frac{1024}{3125} = \frac{84}{5}\\
V(N) &= E(N^2) - [E(N)]^2 = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

1. La première boule blanche peut être obtenue au tirage n° 1,2,3,4 ou 5 mais pas au tirage 6 car cela impliquerait que les 5 boules précédentes sont noires, ce qui n'est pas possible donc $B(\Omega) = [\![1,5]\!]$.
   Pour calculer les probabilités correspondantes, on introduit les évènements B_i : " piocher une boule blanche au i-ième tirage "

$$\begin{aligned}
P(B=1) &= P(B_1) = \frac{2}{6}, \quad P(B=2) = P(\overline{B_1}\cap B_2) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{4}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\
P(B=3) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(B_3) = \frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{1}{5} \\
P(B=4) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap B_4) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(B_4) = \frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{15} \\
P(B=5) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap B_5) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(\overline{B_4})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}}(B_5) \\
&= \frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

   En résumé, on a

$$B(\Omega) = [\![1,5]\!], \quad P(B=1) = \frac{2}{6} \quad P(B=2) = \frac{4}{15}, \quad P(B=3) = \frac{1}{5}, \quad P(B=4) = \frac{2}{15}, \quad P(B=5) = \frac{1}{15}$$

   Justification des calculs de probabilités :
   $P(B_1)$ *: il y a 6 boules en tout dont 2 blanches donc* $P(B_1) = \frac{2}{6}$
   $P(\overline{B_1})$ *: il y a 6 boules en tout dont 4 non blanches donc* $P(\overline{B_1}) = \frac{4}{6}$
   $P_{\overline{B_1}}(B_2)$ *: une boule non blanche a déjà été piochée donc l'urne contient 5 boules dont 2 blanches et 3 non blanches. La probabilité de piocher une boule blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{2}{5}$.
   $P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})$ *: une boule non blanche a déjà été piochée donc l'urne contient désormais 5 boules dont 2 blanches et 3 non blanches. La probabilité de piocher une boule non blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{3}{5}$
   $P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(B_3)$ *: deux boules non blanches ont déjà été piochées donc l'urne contient désormais 4 boules dont 2 blanches et deux non blanches. La probabilité de piocher une boule blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{2}{4}$.
   $P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})$ *: deux boules non blanches ont déjà été piochées donc l'urne contient désormais 4 boules dont 2 blanches et deux non blanches. La probabilité de piocher une boule non blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{2}{4}$.
   $P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(B_4)$ *: trois boules non blanches ont déjà été piochées donc l'urne contient désormais 3 boules dont 2 blanches et une non blanche. La probabilité de piocher une boule blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{2}{3}$.
   $P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(\overline{B_4})$ *: trois boules non blanches ont déjà été piochées donc l'urne contient désormais 3 boules dont 2 blanches et une non blanche. La probabilité de piocher une boule non blanche dans cette urne est donc égale à* $\frac{1}{3}$.
   $P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}}(B_5)$ *: quatre boules non blanches ont déjà été piochées donc l'urne contient désormais 2 boules qui sont toutes blanches. La probabilité de piocher une boule blanche dans cette urne est donc égale à* 1
   Vérification : $\frac{2}{6}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15} = 1$

$$\begin{aligned}
E(B) &= \sum_{k=1}^{5} kP(B=k) = 1\times\frac{2}{6}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15} = \frac{7}{3} \\
E(B^2) &= \sum_{k=1}^{5} k^2P(B=k) = 1^2\times\frac{2}{6}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{2}{15}+5^2\times\frac{1}{15} = 7 \\
V(B) &= E(B^2)-[E(B)]^2 = \frac{140}{3}
\end{aligned}$$

2. Le nombre tirage minimum pour qu'il ne reste qu'une seule couleur est 2 (lorsque l'on pioche deux blanches successives). Le nombre maximal est 5 (parmi les cinq, soit on a obtenu les 4 noires, soit on a au plus 3 noires donc on a au moins les 2 blanches). Pour faire disparaitre une couleur, on peut également faire 3 pioches ($B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3$ par exemple) ou 4 pioches ($\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}$ par exemple).

Par conséquent, $X(\Omega) = [\![2,5]\!]$.

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \underbrace{P(B_1 \cap B_2)}_{\text{disparition des blanches}} = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \\
P(X=3) &= \underbrace{P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)}_{\text{disparition des blanches}} = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15} \\
P(X=4) &= \underbrace{P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) + P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4)}_{\text{disparition des blanches}} + \underbrace{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})}_{\text{disparition des noires}} \\
&= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15} \\
P(X=5) &= \underbrace{P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5) + P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap \overline{B_4} \cap B_5)}_{\text{disparition des blanches}} \\
&\quad + \underbrace{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4 \cap B_5)}_{\text{disparition des blanches}} + \underbrace{P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}) + P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5})}_{\text{disparition des noires}} \\
&\quad + \underbrace{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4 \cap \overline{B_5})}_{\text{disparition des noires}} \\
&= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

En résumé, on a

$$X(\Omega) = [\![2,5]\!], \quad P(X=2) = \frac{1}{15}, \quad P(X=3) = \frac{2}{15}, \quad P(X=4) = \frac{4}{15}, \quad P(X=5) = \frac{8}{15}$$

Vérification : $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} = 1$

Justification des calculs de probabilités : *la justification est identique à celle pour la loi de B dans la question 1.*

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=2}^{5} P(X=k) = 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{64}{15} \\
E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{15} + 3^2 \times \frac{2}{15} + 4^2 \times \frac{4}{15} + 5^2 \times \frac{8}{15} = \frac{286}{15} \\
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{194}{225} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{194}{225}} = \frac{\sqrt{194}}{15}
\end{aligned}
$$

3. Considérons les évènements $(B=3)$ et $(X=2)$. L'évènement $(B=3) \cap (X=2)$ est impossible car il signifie que la première blanche est obtenue au troisième tirage, donc les deux premiers tirages fournissent des boules blanches, et qu'une couleur a disparu au deuxième tirage, il s'agit nécessairement de la couleur blanche donc les deux premiers tirages doivent fournir des boules blanches. Ainsi $P(B = 3 \cap X = 2) = 0$ et, d'après les calculs précédents des questions 1 et 2, on a $P(B=3)P(X=2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{15}$ donc $P(B = 3 \cap X = 2) \neq P(B=3)P(X=2)$ ce qui implique que les variables B et X ne sont pas indépendantes.

correction de l'exercice 3

On introduit naturellement les évènements

R_i : " obtenir une boule rouge au i-ième tirage ",
N_i : " obtenir une boule noire au i-ième tirage "
J_i : " obtenir une boule jaune au i-ième tirage "

Pour simplifier les notations, on notera J_1J_2 l'évènement $J_1 \cap J_2$, etc.

Déterminons pour commencer l'univers de X. Il peut rester deux couleurs distinctes au bout de 1 tirage (R_1), 2 tirages

(N_1R_1), 3 tirages $(J_1J_2J_3)$. 4 tirages $(J_1J_2N_3J_4)$. Par contre, on peut avoir un nombre supérieur ou égal de 5 tirages. En effet, si c'était le cas, les quatres premiers tirages donnent nécessairement soit 3 jaunes (et il reste donc 2 couleurs distinctes avant le cinquième tirage), soit 2 jaunes donc nécessairement 1 rouge et 1 noire ou 2 noires et dans tous les cas, une des couleurs a disparu au quatrième tirage (et il ne reste que deux couleurs distinctes au quatrième tirage).
Par conséquent, $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(R_1) = \frac{1}{6}\\
P(X=2) &= \underbrace{P(N_1R_2) + P(J_1R_2)}_{\text{disparition des rouges}} + \underbrace{P(N_1N_2)}_{\text{disparition des noires}} = P(N_1)P_{N_1}(R_2) + P(J_1)P_{J_1}(R_2) + P(N_1)P_{N_1}(N_2)\\
&= \frac{2}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5} = \frac{7}{30}\\
P(X=3) &= \underbrace{P(J_1J_2R_3) + P(J_1N_2R_3) + P(N_1J_2R_3)}_{\text{disparition des rouges}} + \underbrace{P(J_1N_2N_3) + P(N_1J_2N_3)}_{\text{disparition des noires}} + \underbrace{P(J_1J_2J_3)}_{\text{disparition des jaunes}}\\
&= \underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}}_{\text{disparition des rouges}} + \underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}}_{\text{disparition des noires}} + \underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}_{\text{disparition des jaunes}} = \frac{3}{10}\\
P(X=4) &= \underbrace{P(J_1J_2N_3R_4) + P(J_1N_2J_3R_4) + P(N_1J_2J_3R_4)}_{\text{disparition des rouges}} + \underbrace{P(J_1J_2N_3N_4) + P(J_1N_2J_3N_4) + P(N_1J_1J_2N_4)}_{\text{disparition des noires}}\\
&\quad + \underbrace{P(N_1J_1J_2J_3) + P(J_1N_2J_3J_4) + P(J_1J_2N_3J_4)}_{\text{disparition des jaunes}}\\
&= \underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}_{\text{disparition des rouges}} + \underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}_{\text{disparition des noires}}\\
&\quad + \underbrace{\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}_{\text{disparition des jaunes}}\\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : J*e détaillerais pas tous les calculs, seulement deux, les autres étant absolument identiques.*
$P_{J_1}(R_2)$ *: l'évènement J_1 est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule jaune, donc l'urne contient désormais 5 boules dont 1 rouge, 2 noires et 2 jaunes et on souhaite la réalisation de l'évènement R_2, c'est-à-dire que l'on souhaite piocher une boule rouge dans cette nouvelle urne. La probabilité de piocher une boule rouge est alors de* $\frac{1}{5}$
$P_{J_1N_2J_3}(R_4)$ *: l'évènement $J_1N_2J_3$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché trois boules dont deux boules jaunes et une boule noire, donc l'urne contient désormais 3 boules dont 1 rouge, 1 noire et 1 jaune et on souhaite la réalisation de l'évènement R_4, c'est-à-dire que l'on souhaite piocher une boule rouge dans cette nouvelle urne. La probabilité de piocher une boule rouge est alors de* $\frac{1}{3}$
En résumé, on a

$$X(\Omega) = [\![1,4]\!],\quad P(X=1) = \frac{1}{6},\quad P(X=2) = \frac{7}{30},\quad P(X=3) = \frac{3}{10},\quad P(X=4) = \frac{3}{10}$$

Vérification : $\frac{1}{6} + \frac{7}{30} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 1$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{4} kP(X=k) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{7}{30} + 3\times\frac{3}{10} + 4\times\frac{3}{10} = \frac{41}{15}\\
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{4} k^2P(X=k) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{7}{30} + 3^2\times\frac{3}{10} + 4^2\times\frac{3}{10} = \frac{43}{5}\\
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{254}{225}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de Champagne. On fixe un entier $n \in [\![1, 25]\!]$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles découvertes. Déterminer la loi de probabilité de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

correction de l'exercice 5
On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Trouver la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

correction de l'exercice 6
On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($r \leqslant n$). On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Donner les lois des variables $X_{3,2}$, $X_{4,2}$, $X_{4,3}$, $X_{5,4}$.
2. Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $r \leqslant n$.
   En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=r}^{n} C_n^{r-1}$.

correction de l'exercice 7
On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la var égale au maximum des deux numéros obtenus et Y la var égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer soigneusement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

correction de l'exercice 8
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Vérifier que $N(\Omega) = \{2, .., n+1\}$.
2. Démontrer que : $\forall k \in \{1, n\}$, $P(N \geqslant k+1) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.
3. En déduire $P(N = k)$ (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k = n+1$).
4. Montrer que l'espérance $E(N) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A_n^k}{n^k}$.