

correction de l'exercice 1

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$1. S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \right) \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{2n^2}$$

$$2. S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right) \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{3n^3}$$

$$3. S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \quad \text{et} \quad T_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1).$$

On commencera par montrer que $\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

correction de l'exercice 2

On pose $f(x, y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

Déterminer les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \end{array}$$

correction de l'exercice 3

On considère la fonction alculer les dérivées partielles suivantes de la fonction $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

correction de l'exercice 4

Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ll} a : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-xy} & b : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y) \\ c : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 & d : (x, y) \mapsto y^3 - 3x^2y \end{array}$$

correction de l'exercice 5

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions, définies sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$,

$$e : (x, y) \mapsto x(\ln y)^2 + y^2 \quad f : (x, y) \mapsto (\ln y)^2 + 2 \ln y + x^2$$

$$g : (x, y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y} \quad h : (x, y) \mapsto \ln\left(1 + \frac{y}{1+x^2}\right)$$

correction de l'exercice 6

On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

- Déterminer les points critiques de f .
- Les points critiques obtenus précédemment sont-ils des extremas locaux ?

correction de l'exercice 7

On introduit la fonction $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4yx + 4x - 2y - 8$

- Montrer que les points critiques de f forment une droite toute entière dont on donnera l'équation ainsi que la représentation graphique.
- La fonction f possède-t-elle des extrémums locaux ?

correction de l'exercice 8

Déterminer, lorsqu'ils existent, les extrémums locaux des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a(x, y) = x[(\ln x)^2 + y^2] \quad (x > 0) & b(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2) \\ c(x, y) = 3xy - x^3 - y^3 & d(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ e(x, y) = x^2 - x + xy^2 - xy & f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + x^2y + x^3 - 3x^2 - \frac{4}{3} \end{array}$$