EXERCICE

Etude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et on note S_N la N-ième somme partielle de cette série.

1. Donner un encadrement $\frac{1}{t^\alpha}$ lorsque $t \in [n, n+1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$.
2. Montrer que $\forall N \geqslant 1$, $\int_{1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_N \leqslant 1 + \int_{1}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}$.
3. On suppose dans cette question $\alpha = 1$.
   A l'aide de la question 2, en déduire que $\ln(N+1) \leqslant S_N \leqslant 1 + \ln(N)$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?
4. On suppose $\alpha \in]0, 1[$. Comparer $\frac{1}{k^\alpha}$ à $\frac{1}{k}$, en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   Que vaut $\lim_{n\to+\infty} S_n$? La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
5. On suppose dans cette question $\alpha > 1$. Donner la monotonie de la suite S_n, montrer que S_n est majorée par $1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ (on utilisera la question 2 en calculant l'intégrale). En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

EDHEC 2005

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont: 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^\times$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^\times$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k - 1)$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$, $P(X_n = k) = p^k(1 - p)$.
   En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
   (b) En déduire que $E(X) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

5. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E\left(X_{n+}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E\left(X_n\right) + 1\right)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$. Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.
   (d) Montrer enfin que: $V\left(X_n\right) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$

HEC 2000 Math II (Epreuve commune)

Ce problème se compose de quatre parties : il étudie deux suites de variables aléatoires discrètes. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite ,admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule. Si k est égal à 1, on arrête les tirages. Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Partie 1.

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$
   (a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n$
   (c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.
2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$
   (a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
   (b) En déduire la majoration $k_n \leqslant 2$
   (c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) Quelle est la loi de I_n?
   (b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $\forall j \in \mathbb{N}^\times, \forall k \in \{1, 2\ , ..., n\}, \quad P_{(I_n=k)}\left(X_n = j\right) = P\left(X_{k-1} = j-1\right)$
2. (a) Quelle est la loi de X_1 ?
   (b) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.
   (c) Calculer $P_{(I_3=1)}(X_3 = 2)$, $P_{(I_3=2)}(X_3 = 2)$, $P_{(I_3=3)}(X_3 = 2)$. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.
3. (a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$.
   (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation : $\forall j \geqslant 2, \quad P\left(X_n = j\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} P\left(X_k = j-1\right)$
   (d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP\left(X_n = j\right) - (n-1)P\left(X_{n-1} = j\right)$
   En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 : $\forall j \geqslant 1, P\left(X_n = j\right) = \dfrac{n-1}{n}P\left(X_{n-1} = j\right) + \dfrac{1}{n}P\left(X_{n-1} = j\right)$

4. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 3.d). : $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$
   (b) En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.
   (b) En déduire: $V(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations introduites en **Partie 1**).
   (c) Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i\geqslant 1}$une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + \cdots . + T_n$$

   (a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.
   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul :

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n} P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(S_{n-1} = j)$$

   En déduire que X_n et S_n ont même loi.
   (c) Retrouver ainsi $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Partie 3 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{Y}_n$.

1. Donner la loi de Y_n.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?
   (b) Déterminer la loi de Y_2.

2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2

$$P_{(I_n=k)}(Y_n = j) = P(Y_{k-1} = j-k)$$

   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j-n)$$

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$
   Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

Partie 4.

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées entre 1 et n. A partir de l'urne U_n on effectue la suite de tirages décrite dans l'entête du problème. Pour i entier de $\{1, ..., n\}$, on définit $Z_i^{(n)}$ la variable aléatoire égal à 1 si, lors d'un quelconque de ces tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_1^{(n)}$?

2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, et i un entier de $\{1, ..., n-1\}$, montrer la relation

$$P\left(Z_i^{(n)} = 1\right) = \frac{1}{n} + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{n} P\left(Z_i^{(k-1)} = 1\right)$$

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$ et pour tout i de $\{1, ..., n\}$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$.

3. Que vaut $\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $E(X_n)$.

4. Retrouver $E(Y_n)$.