Exercice 1 Déterminer la limite en x_0 de la fonction f

a) $x_0 = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ b) $x_0 = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{2x} + e^{-3x}}$ c) $x_0 = -\infty$ et $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{2x} + e^{-3x}}$

d) $x_0 = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{xe^{-x} - x + 1}{e^{2x} + \ln x}$ e) $x_0 = 0$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{\exp(2x) - 1}$ f) $x_0 = 0$ et $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{\exp(2x^2) - 1}$

g) $x = +\infty$ et $f(x) = (x^2 + x + 1)\ln(1 + \dfrac{1}{x^3})$ h) $x_0 = 0$ et $f(x) = \dfrac{xe^{3x} - e^{2x} + 1}{xe^{-2x} + e^{-3x} - 1}$

Exercice 2 On pose $f(x) = x\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer f'.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ en 0. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$? Que vaut $f'(0)$?

Exercice 3 On note U l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $(0 < x < 1)$ et $(0 < y < 1)$ et $(1 - x - y > 0)$.
On considère la fonction h définie sur U par : $\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(1 - x - y)$
Montrer que la fonction h admet au plus un extremum sur l'ouvert U. Ce point critique est-il un extremum local ?

Exercice 4 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Justifier que g est dérivable en 1. Que vaut $g'(1)$?
3. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g.

Exercice 5 On pose $I_n = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n = \int_0^1 \dfrac{t^2 dt}{(1+t^2)^n} dt$

1. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$ et montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant 1$. La suite $(I_n)_n$ est-elle convergente ?
2. Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n = I_{n+1} + J_{n+1}$.
3. A l'aide d'une intégration par partie convenable, montrer que $I_n = \dfrac{1}{2^n} - 2n(I_n - I_{n+1})$.
4. En déduire que $I_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) I_n - \dfrac{1}{2^n}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}$?

Exercice 6 On considère la fonction $f(x) = \int_1^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} dt$

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier la parité de f.
2. Montrer que la fonction est de classe C^1 sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.
3. Justifier que $\forall x \geqslant 1, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t+1} \leqslant f(x) \leqslant \int_1^x \frac{dt}{t}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x] = 0$. Quel résultat remarquable vient-on d'obtenir ?

Exercice 7 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Etudier les variations de la fonction f. Soit $g(x) = f(x) - x$.
2. (a) Etudier les variations de g. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution notée γ.
   (b) Montrer que $0 < \gamma < 1$. Quel est le signe de g sur $\mathbb{R}$?
3. Soit u la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à $\mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que si u converge alors sa limite est γ.
(b) Montrer que les intervalles $]-\infty, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$ sont stables par f.

4. On suppose $u_0 \geqslant \gamma$.
Justifier que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \gamma$ puis étudier la monotonie de la suite u. Montrer que la suite u est convergente.
5. Par une méthode analogue à la question 4, étudier le cas $u_0 \leqslant \gamma$.

Exercice 8 1. On pose $f(x) = x^3 + 6x$ et $g(x) = \dfrac{1}{6}(1 - x^3)$

(a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
(b) Démontrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par g, vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ et montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

2. On introduit la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(1 - u_n^3)$ et $u_0 = 0$.

(a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$ et enfin que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
(b) Justifier que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 Vérifier que $A^3 - A^2 + 8I_3 = 0_3$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 10 On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $M^3 - 6M^2 + 8M = 0_3$. La matrice M est-elle inversible ?
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux réels a_n et b_n tel que $M^n = a_n M^2 + b_n M$.
3. Exprimer a_{n+1} (resp. b_{n+1}) en fonction de a_n et b_n. Expliciter a_1, b_1, a_2, b_2.
4. Montrer que a vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
5. En remarquant que $b_n = a_{n+1} - 6a_n$, exprimer b_n en fonction de n.

Exercice 11 On pose $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est inversible, déterminer P^{-1} et montrer qu'il existe une unique matrice H telle que $M = PHP^{-1}$
2. Montrer que pour tout entier n, on a $M^n = PH^nP^{-1}$ puis donner tous les coefficients de M^n.

Exercice 12 Etude de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et on note S_N la N-ième somme partielle de cette série.

1. Donner un encadrement $\dfrac{1}{t^\alpha}$ lorsque $t \in [n, n+1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$.
2. Montrer que $\forall N \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_N \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}$.
3. On suppose dans cette question $\alpha = 1$.
A l'aide de la question 2, en déduire que $\ln(N+1) \leqslant S_N \leqslant 1 + \ln(N)$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?
4. On suppose $\alpha \in]0, 1[$. Comparer $\dfrac{1}{k^\alpha}$ à $\dfrac{1}{k}$, en déduire que $\forall n \geqslant 1, \quad S_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$? La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

5. On suppose dans cette question $\alpha > 1$. Donner la monotonie de la suite S_n, montrer que S_n est majorée par $1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ (on utilisera la question 2 en calculant l'intégrale). En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

Exercice 13 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et **sans remise** 3 boules dans l'urne.
On note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Ensuite, on replace dans l'urne toutes les boules blanches obtenues. On doit alors piocher dans l'urne, **avec remise**, autant de boules que le nombre de boules blanches obtenues au premier tirage.
On note Y le nombre de boules blanches obtenues au cours du second tirage.
Par exemple, si lors du premier tirage on tire 2 boules rouges et 1 blanche, on repose dans l'urne la boule blanche (l'urne contient alors 2 boules rouges et 2 boules blanches). On pioche alors 1 boule dans l'urne. Si cette boule est rouge alors $X = 2$ et $Y = 0$.

1. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance. Expliciter la loi de Y ainsi que son espérance.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Donner la loi de la variable aléatoire finie $Z = X + Y$

Exercice 14 Une étude sur le comportement des automobilistes a permis de constater que, dans les grandes villes, les contrevenants aux règles de stationnement se divisent en deux catégories :

- un sur quatre est un contrevenant involontaire (par exemple, dépassement du temps de stationnement dû à une longue file d'attente à la caisse d'un magasin)
- trois sur quatre sont des contrevenants volontaires (par exemple, stationnement gênant le temps d'effectuer un achat)

La probabilité qu'un contrevenant involontaire soit verbalisé est $\dfrac{1}{40}$ mais pour un contrevenant volontaire, généralement plus méfiant, elle est seulement $\dfrac{1}{60}$.

1. Quelle est la probabilité qu'un stationnement irrégulier soit sanctionné ?
2. Une contravention ayant été dressé pour stationnement irrégulier, quelle est la probabilité que le conducteur du véhicule soit un contrevenant volontaire ?
3. Au cours de ses activités professionnelles, un certain contrevenant volontaire se trouve 300 fois dans l'année en stationnement irréguliers et a donc, chaque fois, une probabilité de $\dfrac{1}{60}$ d'être verbalisé.
   Soit $k \in [\![0, 3]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il soit verbalisé k fois dans l'année pour stationnement irrégulier ?
   Quel est le nombre moyen de fois où ce contrevenant est verbalisé en une année ?

Exercice 15 On considère dans cette partie un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs.par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'évènement $[X_j = k]$, où $k = 1$, 2 ou 3.

1. Exprimer $P(X_{j+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$.
   Exprimer de même $P(X_{j+1} = 2)$ et $P(X_{j+1} = 3)$ en fonction de $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$
2. En déduire que $\forall j \geqslant 1, \quad E(X_{j+1}) = \dfrac{2}{3} E(X_j) + 1$. Préciser $E(X_1)$, puis calculer $E(X_j)$ en fonction de j.
3. Montrer par récurrence que
$$\forall j \geqslant 1, \quad P(X_j = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^j, \quad P(X_j = 2) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^j + \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}, \quad P(X_j = 3) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^j - \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}.$$
   Retrouver ainsi la valeur de $E(X_j)$ obtenue à la question 2.