Ecricome 2006 Option S

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes. Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face. Pour $i \in \mathbb{N}^\times$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire. Les deux parties sont indépendantes.

I. Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   (a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   (b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^\times$, $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$. On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$
   (c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

II. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
- La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP... (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2; \qquad N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^\times$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
3. **Fonction génératrice de N_n.**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$
   (a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
   (b) Que représente $G_n'(1)$?
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, .., n\}$ on a

$$P\left((N_n = k) \cap P_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right)$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P\left((N_n = k) \cap F_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right)$$

Montrer alors que
$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)$$

(d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.
Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$

(e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

HEC 2004 Maths II (épreuve commune) Option E

Loi du temps d'attente de la première configuration " pile, pile, face "

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9.
On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement B_n.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
   (c) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.

3. Soit n un entier n supérieur ou égal à 5.
   (a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.
   (b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1}; en déduire l'égalité suivante :
   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
   (c) Vérifier les égalités suivantes $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ et $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, v_{n+1} en fonction de v_n et de v_{n-2}.
   (c) En déduire pour tout entier N supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :
   $$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k.$$
   (d) En déduire que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.

5. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de U_{n-1}).
   En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.
   (b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où n est égal à 2 ou 3.
   (c) Justifier l'égalité suivante $\forall N \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} kc_k = \sum_{k=3}^{N} v_k + (N+1)v_{N+1} - 2v_2$
   En admettant que $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)v_{N+1} = 0$, justifier que la variable aléatoire Y admet une espérance égale à 8.