Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geqslant 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   (a) Jusitifier soigneusement la formule :
   $$\forall k \geqslant 1 \quad P\left(L_1 = k\right) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

   (b) Vérifier par le calcul que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} p\left(L_1 = k\right) = 1$$

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   (d) Calculer la probabilité $P(L_1 = k \cap L_2 = n)$ pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

   (e) En déduire la loi de L_2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. A partir d'un jour donné, que l'on appelera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   (c) Montrer que
   $$\forall k \geqslant 2, \quad P\left(T_2 = k\right) = (k-1)\,(0.7)^2\,(0.3)^{k-2}$$