ESSEC 1995 E1

On désigne par n un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$, que l'on note (E_n). À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par : $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2).

   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.

   (b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).

2. Étude des racines positives de l'équation (E_3)

   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ la fonction f_3.
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

   (b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.

   - Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$, alors, pour tout entier naturel n, $u < y_n \leqslant v$.
   - Montrer que, si $v \leqslant y_0$, alors, pour tout entier naturel n, $v \leqslant y_n$.
   - Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
     En déduire, selon la position de y_0 par rapport à v, le sens de variation de la suite (y_n).
   - Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n).

   (c) On choisit désormais $y_0 = 4$.
   Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant 0,75(v - y_n)$ puis que $0 \leqslant v - y_n \leqslant 0,75^n$. Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près? Donner cette valeur de y_n à l'aide d'un tableur.

   (d) Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(\frac{x_n}{3})$ et la condition initiale x_0, où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v.

   - Montrer que, si $u \leqslant x_0 < v$, alors, pour tout entier naturel n, $u \leqslant x_n < v$.
   - Montrer que, si $x_0 \leqslant u$, alors, pour tout entier naturel n, $x_n \leqslant u$.
   - Étudier le signe de $x_{n+1} - x_n$ en fonction du signe de $x_n - x_{n-1}$.
     En déduire, selon la position de x_0 par rapport à u, le sens de variation de la suite (x_n).
     Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (x_n).

   (e) On choisit désormais $x_0 = 2$.
   Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant x_{n+1} - u \leqslant 0,65(x_n - u)$, puis que $0 \leqslant x_n - u \leqslant 0,65^n$.
   Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5} près?
   Donner cette valeur de x_n à l'aide d'un tableur.

3. Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geqslant 3$.

   (a) Étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

   (b) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.
   Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n), puis prouver la convergence de celle-ci.

   (c) Montrer que $u_n = \exp(\frac{u_n}{n})$, et en déduire la limite L de la suite (u_n), puis un équivalent simple de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(v_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

   (e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]1; +\infty[$.
   Établir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que v_n/n tend vers $+\infty$, puis en déduire un