Exercice 1

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$
   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   (c) Etablir que $0 < \alpha < \frac{1}{5}$.
2. Pour tout entier strictement positif n, on considère l'équation
$$(E_n) : x^3 + 5x = n$$
   (a) Justifier que pour tout entier n, l'équation (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. On note α_n cette solution.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \leqslant \alpha_n \leqslant \sqrt[3]{n}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$.
   (d) Justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$.
   A l'aide de la question précédente, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$
3. Pour tout entier naturel n, on considère l'équation
$$(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On note β_n cette solution.
   (b) Calculer β_0, β_1, β_2. Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < \beta_n \leqslant \frac{1}{5}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.
   (c) En utilisant l'équation satisfaite par β_n, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.
   (d) On souhaite déterminer la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$. Pour cela, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 5x - 1$.
      i. Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
      ii. En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(\beta_n)$.
      iii. Que vaut $f_{n+1}(\beta_{n+1})$? Déduire de cette question et de la précédente que
$$\forall n \geqslant 0, \quad f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$$
      iv. Quelle est la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} = \exp[(1+\frac{1}{x})\ln x] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$. Est-elle dérivable en 0 ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Etudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$. (On donnera un équivalent simple de $f(x) - x$)