EXERCICE

On considère la suite (u_n) dont le terme général est défini par la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_0^1 (1-x^n)^{1/3} dx$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone puis qu'elle est bornée. En déduire sa convergence.
3. Démontrer que l'on a : $\forall x \in [0,1], \quad 1 - x \leqslant (1-x)^{1/3} \leqslant 1 - \dfrac{x}{3}$.
4. En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème

Partie I : Etude d'une suite.

On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$.
On se propose d'étudier la limite S de la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que, pour tout réel t élément de $[0,1]$, on a :
$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t}.$$
2. Déduire de ce qui précède que l'on a :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = S_n + R_n \quad \text{où} \quad R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$
3. Démonter que l'on a pour tout entier naturel n : $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^{2n+2}}{1+t} dt \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$. En déduire que $S = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Partie II : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du$. On introduit pour cela les intégrales suivantes :

$$\forall a > 0, \quad I(a) = \int_1^a \frac{1}{1+u^2} du, \quad J(a) = \int_{1/a}^a \frac{1}{1+u^2} du$$
$$\forall a \in]0,1[, \quad K(a) = \int_0^a \sqrt{1-u^2} du, \quad L(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du, \quad M(a) = \int_0^a \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du$$

1. Montrer que
$$\forall a \in [0,1], \quad 0 \leqslant K(a) \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant K(1) - K(a) \leqslant 1 - a.$$
En déduire $\lim_{a \to 0^+} K(a)$ et $\lim_{a \to 1^-} K(a)$.
2. Pour $a \in]0,1]$, exprimer $J(a)$ en fonction de $I(a)$ et $I\left(\dfrac{1}{a}\right)$.
3. Pour $a > 0$, à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans $I(a)$, montrer que $I(a) = -I\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

4. Pour $a \in]0,1]$, montrer que $L(a) - M(a) = K(a)$.
5. Pour $a \in]0,1]$, à l'aide d'une intégration par partie sur $K(a)$, vérifier que $K(a) = a\sqrt{1-a^2} + M(a)$.
6. Déduire des cinq questions précédentes, que
$$\forall a \in]0,1[, \quad L(a) = 2K(a) - a\sqrt{1-a^2} \quad \lim_{a\to 0} L(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to 1^-} L(a) = 2K(1).$$
7. On considère deux réels y et u appartenant à $[0,1]$ et vérifiant l'égalité $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.
Vérifier que $u = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$ lorsque $u \in [0,1]$.
A l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ dans l'intégrale $I(a)$, montrer que
$$\forall a > 1, \quad J(a) = \int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$
En déduire que l'on a
$$(1) \qquad -2I\left(\frac{1}{a}\right) = L\left(\frac{1}{\sqrt{1+(1/a)^2}}\right) - L\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$
8. En faisant tendre a vers $+\infty$ dans l'égalité (1), en déduire que $\displaystyle\int_{\circ}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$.
9. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$
   (a) Rappeler l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 ainsi que l'inéquation définissant l'intérieur de ce cercle.
   Rappeler l'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
   (b) En déduire que la partie du plan définie par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$ est exactement le quart du cercle $\mathcal{C}$ contenu dans le quart de plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$
   (c) Donner alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ et donc celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.
   (d) En déduire que l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Partie III : Calcul numérique de π

Les parties I et II nous ont permis de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant S_{2n+1} - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \frac{1}{4n+5}$ puis que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)} - \pi \leqslant \frac{4}{4n+5}$.
3. A l'aide d'un tableur, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)}$. En déduire les trois premières décimales de π.