Exercice 1
On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit de plus la matrice $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. **Première méthode pour calculer** M^n :
   (a) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire l'expression de J^3, J^4 et J^5 en fonction de J. Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$. Calculer le produit $M\left(2I - \dfrac{1}{3}J\right)$.
   Retrouver que M est inversible et donner son inverse.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$.
   La formule est-elle vraie pour $n = -1$?
2. **Deuxième méthode pour calculer** M^n :
   (a) Vérifier que $M^2 - \dfrac{3}{2}M = -\dfrac{1}{2}I$. La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Montrer que pour entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI$.
   (c) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que valent a_0, b_0, a_1, b_1 ?
   (d) Montrer que la suite a est récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de a_n et b_n.
3. **Troisième méthode pour calculer** M^n :
   On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse.
   (b) Déterminer la matrice N vérifiant l'égalité : $M = PNP^{-1}$.
   (c) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PN^nP^{-1}$ puis donner les neuf coefficients de M^n.
4. **Une application probabiliste** :
   Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.
   On note
   - A_n l'événement : " le mobile se trouve en A à l'instant n ".
   - B_n l'événement : " le mobile se trouve en B à l'instant n ".
   - C_n l'événement : " le mobile se trouve en C à l'instant n ".

   On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   (c) En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n et calculer les limites correspondantes.