Exercice 1
On considère 4 urnes notées U_0, U_1, U_2, U_3 telles que

- l'urne U_0 soit composée de 0 boule rouge et 3 boules blanches.
- l'urne U_1 soit composée de 1 boule rouge et de 2 boules blanches.
- l'urne U_2 soit composée de 2 boules rouges et de 1 boule blanche
- l'urne U_3 soit composée de 3 boules rouges et de 0 boule blanche.

On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors 2 tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on considère les évènements :
$\widetilde{U}_k$: " on pioche dans l'urne U_k " R_k : " on pioche exactement k boules rouges lors des 3 tirages "

1. Calculer les 16 probabilités conditionnelles suivantes :

$$\begin{array}{cccccccc} P_{U_0}(R_0) & P_{U_0}(R_1) & P_{U_0}(R_2) & P_{U_0}(R_3) & P_{U_1}(R_0) & P_{U_1}(R_1) & P_{U_1}(R_2) & P_{U_1}(R_3) \\ P_{U_2}(R_0) & P_{U_2}(R_1) & P_{U_2}(R_2) & P_{U_2}(R_3) & P_{U_3}(R_0) & P_{U_3}(R_1) & P_{U_3}(R_2) & P_{U_3}(R_3) \end{array}$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer les 4 probabilités $P(R_0)$, $P(R_1)$, $P(R_2)$, $P(R_3)$.

3. En déduire les 16 probabilités conditionnelles suivantes

$$\begin{array}{cccccccc} P_{R_0}(U_0) & P_{R_0}(U_1) & P_{R_0}(U_2) & P_{R_0}(U_3) & P_{R_1}(U_0) & P_{R_1}(U_1) & P_{R_1}(U_2) & P_{R_1}(U_3) \\ P_{R_2}(U_0) & P_{R_2}(U_1) & P_{R_2}(U_2) & P_{R_2}(U_3) & P_{R_3}(U_0) & P_{R_3}(U_1) & P_{R_3}(U_2) & P_{R_3}(U_3) \end{array}$$

Exercice 2
On dispose de deux urnes A et B : initialement l'urne A contient 2 boules noires tandis que l'urne B contient 2 boules blanches. On y effectue une suite d'épreuves, chaque épreuve étant réalisée de la façon suivante :
On tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A est mise dans B, celle tirée de B est mise dans A.
Pour tout entier n, on considère les évènements

- X_n : " l'urne A contient 0 boule noire à l'issue de la n-ième épreuve "
- Y_n : " l'urne A contient 1 boule noire à l'issue de la n-ième épreuve "
- Z_n : " l'urne A contient 2 boules noires à l'issue de la n-ième épreuve "

On considère également x_n, y_n, z_n les probabilités respectives de X_n, Y_n, Z_n, c'est-à-dire

$$P(X_n) = x_n, \quad P(Y_n) = y_n, \quad P(Z_n) = z_n$$

1. Calculer les probabilités $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

2. Calculer les 9 probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{X_n}(X_{n+1}),\ P_{X_n}(Y_{n+1}),\ P_{X_n}(Z_{n+1}),\ P_{Y_n}(X_{n+1}),\ P_{Y_n}(Y_{n+1}),\ P_{Y_n}(Z_{n+1}),\ P_{Z_n}(X_{n+1}),\ P_{Z_n}(Y_{n+1}),\ P_{Z_n}(Z_{n+1})$$

3. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer x_{n+1} (resp. y_{n+1}, z_{n+1}) en fonction de x_n, y_n et z_n.

4. Utiliser un tableur pour calculer les 100 premières valeurs des suites $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$. Que constate-t-on ?

5. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad x_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad y_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ce résultat confirme-t-il la constatation de la question 4 ?

Exercice 3
Montrer que l'équation $\ln(2 - x) = x$ admet une et une seule solution α sur $]-\infty, 2[$ et que $0 < \alpha < 1$.