Exercice 1
On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Expliciter le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Qu'en déduit-on sur f ?
3. Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
4. Donner le sens de variations de f sur son domaine de définition.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]e, +\infty[$.
6. Déterminer la nature de l'asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la nature des asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. Est-elle continue en 0 ?
   On admettra dans la suite que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Expliciter la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
   $$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$
4. Dresser le tableau complet des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (limites et extrémas inclus).
5. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Exercice 3
Représentez graphiquement les fonctions suivantes (sur des graphiques distincts) puis étudier la continuité de chacune de ces fonctions.

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 4
T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geqslant \frac{1}{4} \quad y \geqslant \frac{1}{4} \quad x + y \leqslant \frac{3}{4}$$

On note T' l'intérieur de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x + y}$

1. Représenter sur un même graphique T et T'.
2. On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
   (b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.
3. Démontrer, par de simples considérations sur des inégalités, que l'on a pour tout couple (x, y) de T:
   $$2 \leqslant f(x, y) \leqslant \frac{16}{3}$$