CORRIGE

1. Notons, improprement, A l'évènement " le serveur A est choisi ", B l'évènement " le serveur B est choisi ", T l'évènement " il a une erreur de transmission ". L'énoncé indique que $P(A)=\dfrac{7}{10}$, $P(B)=\dfrac{3}{10}$, $P_A(T)=\dfrac{1}{10}$ (le serveur A étant choisi, on a 1 chance sur 10 pour qu'il y ait une erreur de transmission) et $P_B(T)=\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{20}$.

   (a) Soit on a choisi le serveur A, soit on a choisi le serveur B. La famille (A,B) étant un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales montre que

   $$P(T)=P(A)P_A(T)+P(B)P_B(T)=\frac{7}{10}.\frac{1}{10}+\frac{3}{10}.\frac{1}{20}=\frac{1}{200}(14+3)=\frac{17}{200}.$$

   (b) Ce qui est réalisé est l'erreur de transmission, ce que l'on souhaite est que le serveur A soit choisi. On nous demande donc de calculer $P_T(A)$. Notre ami Bayes nous fournit l'égalité

   $$P_T(A)=\frac{P_A(T)P(A)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{10}.\frac{7}{10}}{\frac{17}{200}}=\frac{7}{100}.\frac{200}{17}=\frac{14}{17}.$$

2. (a) L'énoncé nous mache le travail :-). L'évènement $(L=k)$ signifie que que l'on a utilisé durant les k premiers jours le même serveur, soit toujours le A, soit toujours le B, et le $(k+1)^{ième}$ jour on a utilisé l'autre serveur. Ainsi, on a

   $$(L_1=k)=(\underbrace{A...A}_{k\text{ fois}})B\cup(\underbrace{B...B}_{k\text{ fois}})A.$$

   Les évènements $A...AB$ et $B...BA$ sont clairement incompatibles (disjoints en terme d'ensemble) donc

   $$P(L_1=k)=P(A...AB)+P(B..BA).$$

   Les choix des serveurs étant supposés indépendants, on a

   $$\begin{aligned}P(L_1 &= k)=P(A)...P(A)P(B)+P(B)..P(B)P(A)\\ &= (P(A))^kP(B)+(P(B))^kP(A)=(0.7)^k(0.3)+(0.3)^k(0.7).\end{aligned}$$

   (b)

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}p(L_1=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(0.7)^k(0.3)+(0.3)^k(0.7)=(0.3)\sum_{k=1}^{+\infty}(0.7)^k+(0.7)\sum_{k=1}^{+\infty}(0.3)^k\\ &= (0.3)\sum_{j=0}^{+\infty}(0.7)^{j+1}+(0.7)\sum_{j=0}^{+\infty}(0.3)^{j+1}\quad(j=k-1)=(0.3)(0.7)\sum_{j=0}^{+\infty}(0.7)^j+(0.7)(0.3)\sum_{j=0}^{+\infty}(0.3)^j\\ &= (0.3)(0.7)\left(\frac{1}{1-0.7}+\frac{1}{1-0.3}\right)=(0.3)(0.7)\left(\frac{1}{0.3}+\frac{1}{0.7}\right)=(0.7)+(0.3)=1\end{aligned}$$

   (c) Montrons que L_1 admet une espérance. La série $\sum\limits_{k\geqslant1}kP(L_1=k)$ s'écrit

   $$\sum_{k\geqslant1}kP(L_1=k)=(0.3)\sum_{k\geqslant1}k(0.7)^k+(0.7)\sum_{k\geqslant1}k(0.3)^k=(0.3)(0.7)\sum_{k\geqslant1}k(0.7)^{k-1}+(0.7)(0.3)\sum_{k\geqslant1}k(0.3)^{k-1}$$

   Puisque (0.3) et $(0,7)$ appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$, les séries $\sum\limits_{k\geqslant1}k(0.7)^{k-1}$ et $\sum\limits_{k\geqslant1}k(0.3)^{k-1}$ sont convergentes donc, par combinaison linéaire, la série $\sum\limits_{k\geqslant1}kP(L_1=k)$ est convergente. En outre, l'espérance de L_1 est donnée par

   $$\begin{aligned}E(L_1) &= (0.3)(0.7)\sum_{k=1}^{+\infty}k(0.7)^{k-1}+(0.7)(0.3)\sum_{k=1}^{+\infty}k(0.3)^{k-1}\\ &= (0.3)(0.7)\sum_{k=0}^{+\infty}k(0.7)^{k-1}+(0.7)(0.3)\sum_{k=0}^{+\infty}k(0.3)^{k-1}\quad 0\times(0.7)^{0-1}=0\times(0.3)^{0-1}=0\\ &= \frac{(0.3)(0.7)}{(1-(0.7))^2}+\frac{(0.7)(0.3)}{(1-(0.3))^2}=(0.3)\frac{(0.7)}{(0.3)^2}+(0.7)\frac{(0.3)}{(0.7)^2}=\frac{(0.7)}{(0.3)}+\frac{(0.3)}{(0.7)}=\frac{7}{3}+\frac{3}{7}=\frac{58}{21}.\end{aligned}$$

(d) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ (si on a ABA alors $L_1 = 1$ et $L_2 = 1$). Soient $i \in \mathbb{N}^\times$ et $j \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, l'évènement $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ signifie que l'on a choisi soit A durant les i premiers jours puis B durant les j jours suivants et A le $(i+j+1)^{ième}$ jour, soit B durant les i premiers jours puis A durant les j jours suivants et B le $(i+j+1)^{ième}$ jour. On en déduit que :

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = (\underbrace{A...A}_{i \text{ fois}}\underbrace{B...B}_{j \text{ fois}}A) \cup (\underbrace{B...B}_{i \text{ fois}}\underbrace{A...A}_{j \text{ fois}}B).$$

En particulier, on a choisi $(i+1)$ fois le serveur A et j fois le serveur B dans le premier cas et $(i+1)$ fois le serveur B et j fois le serveur B dans le deuxième cas. Les évènements $(A..AB...BA)$ et $(B...BA...AB)$ étant incompatibles et les choix des serveurs indépendants, on obtient, pour tous les entiers i, j non nuls,

$$\begin{aligned} P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= P(A..AB...BA) + P(B...BA...AB) \\ &= (P(A))^{i+1}(P(B))^j + (P(B))^{i+1}(P(A))^j = (0.7)^{i+1}(0.3)^j + (0.3)^{i+1}(0.7)^j \end{aligned}$$

(e) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^\times$, on a

$$\begin{aligned} P(L_2 &= j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left((0.7)^{i+1}(0.3)^j + (0.3)^{i+1}(0.7)^j\right) \\ &= (0.3)^j \sum_{i=1}^{+\infty}(0.7)^{i+1} + (0.7)^j \sum_{i=1}^{+\infty}(0.3)^{i+1} \underset{k=i-1}{=} (0.3)^j \sum_{k=0}^{+\infty}(0.7)^{k+2} + (0.7)^j \sum_{k=0}^{+\infty}(0.3)^{k+2} \\ &= (0.3)^j(0.7)^2 \sum_{k=0}^{+\infty}(0.7)^k + (0.7)^j(0.3)^2 \sum_{k=0}^{+\infty}(0.3)^k = \frac{(0.3)^j(0.7)^2}{1-(0.7)} + \frac{(0.7)^j(0.3)^2}{1-(0.3)} \\ &= (0.3)^{j-1}(0.7)^2 + (0.7)^{j-1}(0.3)^2. \end{aligned}$$

3. (a) Soit $\mathcal{E}$ l'expérience : " choix du serveur ". On répète n fois l'expérience $\mathcal{E}$, ces expériences étant deux à deux indépendantes. La variable N_n représente le nombre de fois où l'évènement A se réalise donc N_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, (0.7))$ donc

$$N_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(N_n = k) = \tbinom{n}{k}(0.7)^k(0.3)^{n-k}$$

et $E(N_n) = (0.7)n =, V(X) = n(0.7)(0.3). = (0.21)n.$

(b) Soit $\mathcal{E}'$ l'expérience " choix du serveur ". On répète indéfiniment les expériences $\mathcal{E}'$ jusqu'à la première réalisation de l'évènement A (choix du serveur A). Puisque les expériences étant deux à deux indépendantes, que $P(A) = 0.7$, on en déduit que la variable T_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0.7)$.

$$T_1(\Omega) = \mathbb{N}^\times \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(T_1 = n) = (0.7)(0.3)^{n-1}.$$

D'autre part, les séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} nP(T_1 = n) = (0.7) \sum\limits_{n \geqslant 1} n(0.3)^{n-1}$ et

$$\sum_{n\geqslant 1} n^2 P(T_1 = n) = (0.7)\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(0.3)^{n-1} + (0.7)\sum_{n\geqslant 1} n(0.3)^{n-1} = (0.7)(0.3)\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(0.3)^{n-2} + (0.7)\sum_{n\geqslant 1} n(0.3)^{n-1}$$

sont convergentes car $(0.3) \in]-1, 1[$ donc T_1 admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned} E(T_1) &= (0.7)\sum_{n=1}^{+\infty} n(0.3)^{n-1} = \frac{(0.7)}{(1-(0.3))^2} = \frac{(0.7)}{(0.7)^2} = \frac{1}{(0.7)} = \frac{10}{7} \\ E(T_1^2) &= (0.7)(0.3)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(0.3)^{n-2} + (0.7)\sum_{n=1}^{+\infty} n(0.3)^{n-1} = (0.7)(0.3)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(0.3)^{n-2} + (0.7)\sum_{n=0}^{+\infty} n(0.3)^{n-1} \\ &= \frac{2(0.7)(0.3)}{(1-(0.3))^3} + \frac{(0.7)}{(1-(0.3))^2} = \frac{2(0.3)}{(0.7)^2} + \frac{1}{(0.7)} = \frac{2(0.3)+(0.7)}{(0.7)^2} = \frac{1.3}{0.49} = \frac{130}{49} \\ V(T_1) &= E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = \frac{130}{49} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{30}{49} \end{aligned}$$

(c) Pour commencer $T_2(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ (il faut deux tentatives pour obtenir une seconde fois le serveur A). Si $k \geqslant 2$, la réalisation de l'évènement $(T_2 = k)$ signifie que durant les $(k-1)$ premiers jours, on a choisi qu'une seule fois le serveur A, c'est-à-dire $N_{k-1} = 1$, et que le $k^{ième}$ jour, on a choisi le serveur A. Les évements $(N_{k-1} = 1)$ et A sont indépendants (les choix des serveurs précédents le $k^{ième}$ jour n'influe pas sur le choix du serveur du $k^{ième}$ jour). On en déduit que

$$\begin{aligned} P(T_2 &= k) = P(N_{k-1} = 1) \cap A = P(N_{k-1} = 1)P(A) \\ &= \tbinom{k-1}{1}(0.7)^1(0.3)^{(k-1)-1}(0.7) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}. \end{aligned}$$