1. (a) Les fonction $f_1$ et $f_2$ sont $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$
$f_1'(x) = (x-1)e^{-x}$ est du signe de $x-1$, $f_1'(0) = -1$ , $f_1(1) = 1 - \dfrac{1}{e}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_1(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $1-e^{-1}$ | $\nearrow$ | $1$ |

$f_2'(x) = x(x-2)e^{-x}$ est du signe de $x-2$, $f_2'(0) = 0$, $f_2(1) = 1 - 4\times e^{-2}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 1$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $1-4e^{-2}$ | $\nearrow$ | $1$ |

(b) On en déduit que $\forall x \in [0,+\infty[,\quad f_1(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ et $f_2(x) \geqslant 1 - 4\times e^{-2} > 0$. On en déduit que $(E_1)$ et $(E_2)$ n'ont pas de solution positive sur $[0,+\infty[$.

2. (a) La fonction $f_3$ est $C^1$ sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f_3'(x) = x^2(x-3)e^{-x}$ est du signe de $x-3$, $f_3'(0) = 0$ ; $f_3(1) = 1 - (\dfrac{3}{e})^3 < 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 1$.

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_3(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $1-(3e^{-1})^3$ | $\nearrow$ | $1$ |

- Sur $[0;3]$ la fonction $f_3$ est continue strictement décroissante et $f_3(3) = 1 - \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 < 0 < 1 = f_3(0)$ donc (théorème de la bijection réciproque) il existe une unique solution de $(E_3)$ dans $]0;3[$, qu'on notera $u$. Comme $f_3(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ et $f_3(2) = 1 - \dfrac{8}{e^2} < 0$, on déduit que $u \in ]1;2[$.
- Sur $[3;+\infty[$ la fonction$f_3$ est continue strictement croissante et $f_3(3) = 1 - \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 < 0$, $0 < 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)$ donc $f_3$ réalise une bijection de $[3;+\infty[$ sur $\left[1 - \left(\dfrac{3}{e}\right)^3, 1\right[$ ( théorème de la bijection réciproque ), avec $0 \in \left[1 - \left(\dfrac{3}{e}\right)^3, 1\right[$, il existe une unique solution de $(E_3)$ dans $]3;+\infty[$ qu'on notera $v$. On vérifie avec une calculatrice que $f_3(4) < 0$ et $f_3(5) > 0$ donc $4 < v < 5$.
  Pour $x > 0$ :

  - $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{u;v\}$ • $f_3(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]u;v[$ • $f_3(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0;u[\cup]v;+\infty[$.

  Conclusion : $(E_3)$ admet deux solutions positives $u$ et $v$, $u < v$, plus précisément $1 < u < 2 < 4 < v < 5$.

(b) On commence à remarquer que $u$ et $v$ sont solutions de

$$1 - x^3e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^3e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \ln(x^3e^{-x}) = \ln 1 \Leftrightarrow 3\ln x - x = 0 \Leftrightarrow 3\ln x = x$$

- On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u < y_n \leqslant v$.
  **Initialisation** $n = 0$ : Par hypothèse $u < y_0 \leqslant v$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
  **Hérédité** : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $u < y_n \leqslant v$ et montrons que $u < y_{n+1} \leqslant v$. En utilisant la stricte monotonie de $x \mapsto 3\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ ainsi que les égalités $3\ln u = u$, $3\ln v = v$, $y_{n+1} = 3\ln y_n$, on en déduit que

$$u < y_n \leqslant v \Rightarrow 3\ln u < 3\ln y_n \leqslant 3\ln v \Leftrightarrow u < y_{n+1} \leqslant v$$

  ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : v \leqslant y_n$.
  **Initialisation** $n = 0$ : Par hypothèse $v \leqslant y_0$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
  **Hérédité** : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $u < y_n \leqslant v$ et montrons que $u < y_{n+1} \leqslant v$. En utilisant la stricte monotonie de $x \mapsto 3\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ ainsi que les égalités $3\ln u = u$, $3\ln v = v$, $y_{n+1} = 3\ln y_n$, on en déduit que
  $$u < y_n \leqslant v \Rightarrow 3\ln u < 3\ln y_n \leqslant 3\ln v \Leftrightarrow u < y_{n+1} \leqslant v$$
  ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
- On a $y_{n+1} - y_n = 3\ln y_n - 3\ln y_{n-1}$. La fonction $x \mapsto 3\ln x$ est strictement croissante donc
  $$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow 3\ln a < 3\ln b \Leftrightarrow 3\ln a - 3\ln b < 0$$
  ce qui entraine que le signe de $3\ln a - 3\ln b$ est celui de $a - b$ donc le signe de $y_{n+1} - y_n = 3\ln y_n - 3\ln y_{n-1}$ est celui de $y_n - y_{n-1}$.
  Il est dès lors immédiat que le signe de $y_{n+1} - y_n$ est celui de $y_1 - y_0 = 3\ln y_0 - y_0$
  D'après la question 3.a, on a

  - $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{u; v\}$ • $f_3(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]u; v[$ • $f_3(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0; u[\cup]v; +\infty[$.

  et puisque l'on a
  $$f_3(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > x^3e^{-x} \Leftrightarrow e^x > x^3 \Leftrightarrow x > 3\ln(x)$$
  ce qui entraine que
  - Si $y_0 \in ]u; v[$ alors $y_0 < 3\ln y_0 = y_1$ donc $y_1 - y_0 > 0$ on en déduit que $(y_n)$ est strictement croissante minorée par $u$ donc convergente vers $L \in [u; v]$ avec $L \geqslant y_0 > u$ et $L = 3\ln L \Leftrightarrow f_3(L) = 0$ donc $L = v$.
  - Si $y_0 \in ]v; +\infty[$ alors $y_0 > 3\ln y_0 = y_1$ donc $y_1 - y_0 < 0$ on en déduit que $(y_n)$ est strictement décroissante minorée par $v$ donc convergente vers $L \in [v; +\infty[$ et $L = 3\ln L \Leftrightarrow f_3(L) = 0$ donc $L = v$.

  Par conséquent, la suite $(y_n)$ converge vers $v$.

(c) On choisit désormais $y_0 = 4$.
Établir pour tout entier naturel $n$ que $0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant 0,75(v - y_n)$ puis que $0 \leqslant v - y_n \leqslant 0,75^n$. Comment suffit-il de choisir l'entier $n$ pour que $y_n$ constitue une valeur approchée de v à $10^{-5}$ près? Donner cette valeur de $y_n$ à l'aide d'un tableur.
D'après la question 2.b) et puisque $4 = y_0 < v$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in [u; v]$, la suite $(y_n)_n$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4 \leqslant y_n$, ce qui entraine que $y_n \in [4; v]$ et la suite $(y_n)_n$ converge vers $v$. La fonction $\varphi : x \mapsto 3\ln x$ est de classe $C^1$ sur $[4; v]$ et
$$\forall x \in [4; v], \quad \varphi'(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow 0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{3}{4}$$
L'inégalité des accroissements finis montre que
$$\forall x, y \in [4; v], \quad |3\ln x - 3\ln y| \leqslant \frac{3}{4}|x - y|$$
En choisissant $x = v \in [4; v]$ et $y = y_n \in [4; v]$, on a
$$|3\ln v - 3\ln y_n| \leqslant \frac{3}{4}|v - y_n| \Leftrightarrow |v - y_{n+1}| \leqslant \frac{3}{4}|v - y_n|$$
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant v \Leftrightarrow |v - y_n| = v - y_n$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(v - y_n)$.
Considérons la récurrence $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant v - y_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$
**Initialisation** $n = 0$ : $v - y_0 = v - 4 \in [0, 1]$ (cf. question 2.a)) et $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ donc $0 \leqslant v - y_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^0$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
**Hérédité** : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $0 \leqslant v - y_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et montrons que $0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.
$$0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(v - y_n) \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Pour que $y_n$ soit une valeur approchée de $v$ à $10^{-5}$ près il suffit que $0 \leqslant v - y_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-5}$ soit $n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -5\ln(10)$, c'est à dire que $n \geqslant \dfrac{-5\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 40,02 \pm 10^{-2}$ donc $n = 41$ convient.

Le tableur nous donne $y_{41} = 4,536403626$ donc $v \simeq 4,53640 \pm 10^{-5}$.

(d) On pourrait procéder par la même méthode qu'en 2.c) (je laisse le lecteur la faire) mais une autre est également possible, la voici.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la condition initiale $x_0 \in [0; v[$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \theta(x_n)$ où $\theta : x \mapsto \exp\left(\frac{x}{3}\right)$. La fonction $x\ \alpha\ x^{\ 1/3}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour $x \in ]0; +\infty[$ on a :

- $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = x^3 \Leftrightarrow e^{x/3} = x \Leftrightarrow \theta(x) = x$
- $f_3(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x^3 e^{-x} \Leftrightarrow e^x < x^3 \Leftrightarrow \theta(x) < x$
- $f_3(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > x^3 e^{-x} \Leftrightarrow e^x > x^3 \Leftrightarrow \theta(x) > x$

Et du 2 )a) on en déduit que si $x > 0$ :

- $\theta(x) = x \Leftrightarrow x \in \{u; v\}$ • $\theta(x) > x \Leftrightarrow x \in ]0; u[\cup]v; +\infty[$ • $\theta(x) < x \Leftrightarrow x \in ]u; v[$.

- Si $u \leqslant x_0 < v$, alors si pour un entier naturel $n$, $u \leqslant x_n < v$ de la croissance de $\theta$ sur $\mathbb{R}$ on déduit que
$$u = \theta(u) \leqslant \theta(x_n) = x_{n+1} < \theta(v) = v$$
donc $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u \leqslant x_n < v$.
- Si $x_0 \leqslant u$, alors si pour un entier naturel $n$, $x_n \leqslant u$ de la croissance de $\theta$ sur $\mathbb{R}$ on déduit que $x_{n+1} = \theta(x_n) < \theta(u) = u$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad x_n \leqslant u$.
- La fonction $\theta$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les nombres $x_n - x_{n-1}$ et $\theta(x_n) - \theta(x_{n-1})$ sont de même signe c'est à dire que $x_{n+1} - x_n$ est du signe de $x_n - x_{n-1}$ c'est à dire que $(x_n)$ est monotone.
- Si $x_0 \in ]0; u[$ alors $x_1 = \theta(x_0) > x_0$, on en déduit que $(x_n)$ est une suite croissante majorée par $u$ donc convergente vers un nombre $L$, $L \in ]0; v[$.
- Si $x_0 \in [u; v[$ alors $x_1 = \theta(x_0) \leqslant x_0$, on en déduit que $(x_n)$ est une suite décroissante minorée par $u$ donc convergente vers un nombre $L$, $L \in ]0; v[$. La fonction $\varphi$ étant continue en $L$ on a :
$$L = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \theta(x_n) = \theta(L)$$
c'est à dire que $L \in ]0; v[$ et $\theta(L) = L$ donc $L = u$. On en déduit que la suite $(x_n)$ converge vers $u$.

(e) $x_0 = 2$, donc, d'après ce qui précède, $(x_n)$ est une suite de $[u; 2] \subset [1; 2]$.
$$\forall x \in [1; 2], \quad \theta(x) = \exp\left(\frac{x}{3}\right), \quad \theta'(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{3}\right)}{3},$$
$\theta'$est croissante donc
$$\forall x \in [1; 2] \quad 0 \leqslant \exp\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \theta'(x) = \frac{\exp\left(\frac{2}{3}\right)}{3} \leqslant 0,65$$
car $\dfrac{\exp\left(\frac{2}{3}\right)}{3} \simeq 0,64924$ à $10^{-5}$ près. On a $u \in [1; 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [u; 2] \subset [1; 2]$ donc $0 \leqslant u - x_n$ et de l'inégalité des accroissements finis on déduit que
$$|\theta(u) - \theta(y_n)| \leqslant 0,65\,|u - x_n| \Leftrightarrow |u - x_{n+1}| \leqslant 0,65\,|u - x_n|$$
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [u; 2]$ donc $|u - x_n| = x_n - 2$ donc
$$0 \leqslant x_{n+1} - u \leqslant 0,65(x_n - u)$$
Effectuons une récurrence rapide. On a $u \in [1; 2]$ et $x_0 = 2$ donc $0 \leqslant x_0 - u = 2 - u \leqslant 2 - 1 = 1 = 0,65^0$.
Supposons que pour un certain entier naturel $n$ on ait $0 \leqslant x_n - u \leqslant 0,65^n$, alors
$$0 \leqslant x_{n+1} - v \leqslant 0,65(x_n - u) \leqslant 0,65 \times 0,65^n = 0,65^{n+1},$$

car $0,65 \geqslant 0$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n - u \leqslant 0,65^n$.
Pour que $x_n$ soit une valeur approchée de $u$ à $10^{-5}$ près il suffit que $0,65^n \leqslant 10^{-5}$ soit $n\ln(0,65) \leqslant -5\ln(10)$ c'est à dire que $n \geqslant \dfrac{-5\ln(10)}{\ln(0,65)} \simeq 26,725$ donc $n = 27$ convient.
Le tableur nous donne $x_{27} = 1,857184222$ donc $u \simeq 1,85718 \pm 10^{-5}$.

3. (a) Sur $[0;+\infty[$ la fonction $f_n$ est $C^1$ sur cet intervalle. On a vu dans les préliminaires que pour $x \in ]0;+\infty[$ $f_n'(x)$ est du signe de $x-n$ donc $f_n$ est strictement décroissante sur $[0;n]$ et strictement croissante sur $[n;+\infty[$.
   - De plus $f_n(0) = 1$ et $f_n(n) = 1 - n^n e^{-n} = 1 - (\dfrac{n}{e})^n < 0$ car $e < 3 \leqslant n$ donc, (théorème de la bijection réciproque ) $f_n$ réalise une bijection de $[0,n]$ sur $\left[1-(\dfrac{n}{e})^n;1\right]$ avec $0 \in \left[1-(\dfrac{n}{e})^n;1\right]$ donc $(E_n)$ admet une unique solution $u_n$ dans $[0,n]$, et comme $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, on a plus précisément $1 < u_n < n$.
   - De plus $f_n(n) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$ donc, (du théorème de la bijection réciproque ) $f_n$ réalise une bijection de $[n;+\infty[$ sur $\left[1-(\dfrac{n}{e})^n;1\right[$ avec $0 \in \left[1-(\dfrac{n}{e})^n;1\right[$ donc, $(E_n)$ admet une unique solution $v_n$ dans $[n;+\infty[$ plus précisément $n < v_n$.
   On remarque que si $x \geqslant 0$ on a: $(f_n(x) < 0) \Leftrightarrow (x \in ]u_n;v_n[)$.

   Conclusion: L'équation $(E_n)$ admet deux racines positives $u_n$ et $v_n$ telles que $1 < u_n < v_n$.

(b) Pour $n \geqslant 4$, $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ donc $(u_{n-1})^{n-1}e^{-u_{n-1}} = 1$ et

$$f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}(u_{n-1})^{n-1}e^{-u_{n-1}} = 1 - u_{n-1} < 0$$

car $1 < u_n$. Donc $f_n(u_{n-1}) < 0$ et $f_n(u_n) = 0$ or $1 < u_{n-1} < n-1 < n$ et $1 < u_n < n$, comme $f_n$ est strictement décroissante sur $[1;n]$ on déduit que $u_{n-1} > u_n$. On en déduit que $(u_n)$ est une suite décroissante minorée par 1 donc convergente.

(c) Soit $x > 0$ on a :

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^n e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^n = e^x \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{x}{n}\right).$$

Comme $u_n > 0$ on a $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$. La suite $(u_n)$ étant convergente on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) = \exp(0) = 1.$$

Conclusion: la suite $(u_n)$ converge vers 1 et l'on a

$$\forall n > 1, \quad u_n - 1 = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) - 1 = \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

d'où $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

(d) Pour $n > 4$, $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0$ donc $(v_{n-1})^{n-1}e^{-v_{n-1}} = 1$ et

$$f_n(v_{n-1}) = 1 - v_{n-1}(v_{n-1})^{n-1}e^{-v_{n-1}} = 1 - v_{n-1} < 0$$

car $1 < n < v_n$. Donc $f_n(v_{n-1}) < 0$ et comme $v_{n-1} > 0$, on déduit des variations de $f_n$ que $v_{n-1} \in ]u_n;v_n[$ donc $(v_n)$ est une suite strictement croissante qui a pour limite $+\infty$ car $\forall n \geqslant 4, \quad n < v_n$.

(e) Pour tout réel $x > 1$ : $g(x) = x - \ln(x)$ et $g'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x > 0$. La fonction $g$ est de classe $C^\infty$ sur $]1;+\infty[$, donc continue sur cet intervalle, strictement croissante, $x \mapsto x - \ln(x)$ étant continue en 1 on a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car si $x > 1$ on a $g(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit (théorème de la bijection réciproque) que $g$ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$.
Soit $x > n \geqslant 3$. On a

$$\begin{aligned}(f_n(x) &= 0) \Leftrightarrow (1 - x^n e^{-x} = 0) \Leftrightarrow (x^n = e^x) \Leftrightarrow (x = \exp\left(\frac{x}{n}\right)) \Leftrightarrow (\frac{x}{n} = \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{n} \\ &\Leftrightarrow (\ln\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \ln(n)) \Leftrightarrow (\ln(n) = \frac{x}{n} - \ln\left(\frac{x}{n}\right)) \Leftrightarrow (\ln(n) = g\left(\frac{x}{n}\right))\end{aligned}$$

d'où $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$ et donc $\frac{v_n}{n} = g^{-1}(g(\frac{v_n}{n})) = g^{-1}(\ln(n))$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$ on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = +\infty$. D'autre part

$$\ln(n) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n}\left(1 - \frac{\ln\left(\frac{v_n}{n}\right)}{\frac{v_n}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.