correction de l'exercice 1

1. (a) La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2+5 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour commencer, on a : $x^3 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$). Comme $0 \in \mathbb{R}$ (*autrement dit* $f(\mathbb{R})$), l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent sur $\mathbb{R}$ de 0 par f). Par conséquent, l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (c) On compare les images $f(0)$, $f(\alpha)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On a :

$$f(0) = -1, \quad f(\alpha) = 0, \ (\alpha \text{ est solution de l'équation } f(x) = 0), \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5^3}$$

   De façon évidente, on a : $f(0) < f(\alpha) < f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $0 < \alpha < \dfrac{1}{5}$.

2. (a) Pour commencer, on a : $(E_n) \Leftrightarrow f(x) = n$. D'après la question 1.b) la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{R}$ (*autrement dit* $f(\mathbb{R})$), l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent sur $\mathbb{R}$ de n par f). Par conséquent, l'équation $x^3 + 5x - 1 = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (b) On compare les images. On a :

$$f(\alpha_n) = n \ (\alpha_n \text{ est solution de l'équation } f(x) = n) \quad \text{et} \quad f(\alpha_{n+1}) = n + 1$$

   De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f(\alpha_n) \leqslant f(\alpha_{n+1})$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ donc la suite $(\alpha_n)_n$ est croissante

   (c) On compare les images : On a :

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f(\alpha_n) = n \quad \text{et} \quad f\left(\sqrt[3]{n}\right) = n + 5\sqrt[3]{n} + 1 \geqslant n$$

   De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f(\alpha) \leqslant f(\alpha_n) \leqslant f(\sqrt[3]{n})$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha \leqslant \alpha_n \leqslant \sqrt[3]{n}$.
   En divisant cet encadrement par n, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{\alpha_n}{n} \leqslant \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \frac{n^{1/3}}{n} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{2/3}} = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$.

   (d) Puisque α_n est solution de l'équation $x^3 + 5x = n$, on a $\alpha_n^3 + 5\alpha_n = n$. En divisant cette égalité par n et en remarquant que $\left(n^{1/3}\right)^3 = n$, on obtient

$$\frac{\alpha_n^3}{n} + 5\frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_n^3}{(n^{1/3})^3} + 5\frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_n}{n^{1/3}}\right)^3 + 5\frac{\alpha_n}{n} = 1$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$ (question 2.c), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\alpha_n}{n^{1/3}}\right)^3 = 1 - 5\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n^{1/3}} = 1^{1/3} = 1 \left(\Leftrightarrow \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}\right)$$

3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on introduit la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 5x - 1$$

   Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = nx^{n-1} + 5 > 0$$

   La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$). Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent sur $\mathbb{R}_+$ de 0 par $f_,$). Par conséquent, l'équation $x^n + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) **Calcul de** β_0 : β_0 est l'unique solution positive de

$$(E_0) : x^0 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

   donc $\beta_0 = 0$
   Calcul de β_1 : β_1 est l'unique solution positive de

$$(E_1) : x^1 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

donc $\beta_1 = \dfrac{1}{6}$

Calcul de β_2 : β_2 est l'unique solution positive de

$$(E_2) : x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

donc $\beta_2 = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ (c'est la seule solution positive)

(c) On compare les images par f_n. On a :

$$\begin{aligned} f_n(0) &= -1, \quad f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 5\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^n, \\ f_n(\beta_n) &= 0 \quad (\beta_n \text{ est solution de } f_n(x) = 0) \end{aligned}$$

De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f_n(0) \leqslant f_n(\beta_n) \leqslant f_n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et puisque f_n est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant \frac{1}{5}.$$

(d) L'inégalité précédente montre que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant (\beta_n)^n \leqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison appartenant à $]-1,1[$), le théorème d'encadrement s'applique, ce qui montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.

(e) Le réel β_n vérifie l'équation

$$f_n(\beta_n) = 0 \Leftrightarrow (\beta_n)^n + 5\beta_n - 1 = 0 \Leftrightarrow (\beta_n)^n = 1 - 5\beta_n$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 5\beta_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \dfrac{1}{5}$

(f) i. On étudie le signe de la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ lorsque $x \in]0,1[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 5x - 1 - (x^n + 5x - 1) = x^{n+1} - x^n = \underbrace{x^n}_{>0} \underbrace{(x-1)}_{<0} < 0$$

donc $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

ii. En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n \in]0,1[$, on obtient $f_{n+1}(\beta_n) < f_n(\beta_n)$. Puisque β_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, on en déduit que $f_n(\beta_n) = 0$ donc $f_{n+1}(\beta_n) < 0$.

iii. Puisque β_{n+1} est solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$, on en déduit que $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$.
Nous savons que $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\beta_n) < 0$ donc $f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$.

iv. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante et bijective sur $[0,1]$, l'inégalité précédente implique que $\beta_n < \beta_{n+1}$ donc la suite $(\beta_n)_n$ est strictement croissante.

correction de l'exercice 2

1. **Etude globale** :

La fonction $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ln x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (par somme et produit de fonctions C^1) donc la fonction

$$x \mapsto \exp\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right] = x^{1+1/x}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car exp est C^1 sur $\mathbb{R}$), ce qui montre que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\times.}$$

Etude de la continuité en 0 :

Puisque $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, on aisément l'équivalent suivant : $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (car $\dfrac{\ln x}{x} < 0$ lorsque x est proche de 0) donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ln x = -\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right] = 0 = f(0)$$

ce qui démontre que f est continue en 0 et puiqu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle y est C^1), on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

Etude de la dérivabilité en 0 : On considère le taux d'accroissement de f en 0 en $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{1+1/x}}{x} = x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

(car $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ et $e^X \underset{X\to-\infty}{\to} 0$) donc $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, ce qui implique que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=0}$$

2. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ et que $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$ donc, étant donné que $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$, on a : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

   Etude de l'asymptote en $+\infty$:

$$f(x)=\exp\left(\ln x+\frac{\ln x}{x}\right)=\exp(\ln x)\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)=x\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

   Puisque $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (croissances comparées), on peut substituer à $\dfrac{\ln x}{x}$ à x dans le DL de e^x au voisinage de 0

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\Rightarrow \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$

On en déduit que

$$f(x)=x\left[1+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)\right]=x+\ln x+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}+o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{\to 0 \text{ quand } x\to+\infty}$$

donc $f(x)-(x+\ln x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$ et la courbe d'équation $y=x+\ln x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ Avec les anciennes notations, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y=x$.

Remarque : *puisque* $f(x)-(x+\ln x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x)^2}{x}\geqslant 0$ *donc l'asymptote à* $\mathcal{C}_f$ *en* $+\infty$ *est « en dessous » de* $\mathcal{C}_f$.