Corrigé de l'exercice

1. $u_0 = \int_0^1 (1-x^0)^{1/3}dx = \int_0^1 0dx = 0$ et $u_1 = \int_0^1 (1-x)^{1/3}dx = \left[-\dfrac{(1-x)^{4/3}}{4/3}\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{3}{4}$

2. <u>Monotonie de $(u_n)_n$</u> : Par linéarité de l'intégrale, on a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left[(1-x^{n+1})^{1/3} - (1-x^n)^{1/3}\right] dx$$

On ne peut simplifier cette expression et on doit connaitre le signe de la fonction sous le symbole intégrale. Pour cela, on utilise la croissance et la bijectivité de la fonction $t \mapsto t^{1/3}$, c'est-à-dire que $a^{1/3} \leqslant b^{1/3} \Leftrightarrow a \leqslant b$, autrement dit, pour comparer $(1-x^{n+1})^{1/3}$ et $(1-x^n)^{1/3}$, il suffit de comparer $(1-x^{n+1})$ et $(1-x^n)$.

$$\forall x \in [0,1], \quad (1-x^{n+1}) - (1-x^n) = x^n - x^{n+1} = \underbrace{x^n}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]} \underbrace{(1-x)}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], \quad (1-x^{n+1}) \geqslant (1-x^n) \Rightarrow \forall x \in [0,1], \quad (1-x^{n+1})^{1/3} \geqslant (1-x^n)^{1/3}$$

Par conséquent, $u_{n+1}-u_n$ est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0,1]$ et l'intégration porte sur des bornes croissantes donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, i.e. la suite $(u_n)_n$ est croissante.
<u>$(u_n)_n$ est bornée</u> : On procède par encadrement explicite.

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -x^n \leqslant -0 \Rightarrow 0 \leqslant 1 - x^n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-x^n)^{1/3} \leqslant 1$$

$$\underset{0\leqslant 1}{\Rightarrow} \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 (1-x^n)^{1/3}dx \leqslant \int_0^1 1dx \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Convergence de $(u_n)_n$</u> : La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge.

3. La gestion de la puissance $\dfrac{1}{3}$ compliquant notoroirement le problème, on élève à la puissance 3 afin de raisonner sur des polynômes

$$1-x \leqslant (1-x)^{1/3} \leqslant 1 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow (1-x)^3 \leqslant (1-x) \leqslant \left(1-\frac{x}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^3 \leqslant (1-x) \\ (1-x) \leqslant \left(1-\dfrac{x}{3}\right)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^3 - (1-x) \leqslant 0 \\ (1-x) - \left(1-\dfrac{x}{3}\right)^3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)\left[(1-x)^2 - 1\right] \leqslant 0 & \text{en factorisant} \\ \dfrac{1}{27}x^2(x-9) \leqslant 0 & \text{en développant et factorisant} \end{cases}$$

La première inégalité est vraie car

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 1-x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-x)^2 \leqslant 1 \Rightarrow (1-x)\left[(1-x)^2-1\right] \leqslant 0$$

et la seconde inégalité est aussi vraie car $x \in [0,1]$ donc $x - 9 \leqslant 0$
Par conséquent, on peut affirmer que $\forall x \in [0,1], \quad 1-x \leqslant (1-x)^{1/3} \leqslant 1 - \dfrac{x}{3}$

4. Lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ donc on peut substituer le réel x^n dans l'encadrement de la question 3, ce qui nous donne

$$\forall x \in [0,1] \quad 1-x^n \leqslant (1-x^n)^{1/3} \leqslant 1 - \frac{x^n}{3} \underset{0\leqslant 1}{\Rightarrow} \int_0^1 (1-x^n)dx \leqslant \int_0^1 (1-x^n)^{1/3}dx \leqslant \int_0^1 \left(1-\frac{x^n}{3}\right)dx$$

$$\Rightarrow \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} \leqslant u_n \leqslant \left[x - \frac{x^{n+1}}{3(n+1)}\right]_{x=0}^{x=1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 - \frac{1}{3(n+1)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3(n+1)}\right) = 1$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Corrigé du problème

Partie I

1. Pour cela, on va simplifier la somme du membre de droite

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(-1)^k t^{2k}}_{=(-1)^k(t^2)^k=(-t^2)^k} &= \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t} = \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

2. On intègre l'égalité précédente sur $[0,1]$ et on utilise la linéarité de l'intégrale ($\int_a^b f+g+\cdots = \int_a^b f + \int_a^b g + \cdots$, ce que l'on peut aussi écrire $\int_a^b \sum_k f_k = \sum_k \int_a^b f_k$) Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_{t=0}^{t=1} + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt = S_n + R_n\end{aligned}$$

3. On doit comparer une intégrale dépendant de n à des expressions dépendant de n, donc on va encadrer les parties indépendantes de n et conserver, dans un premier temps, les parties dépendantes de n, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\forall t &\in [0,1],\quad 0\leqslant t^2\leqslant 1 \Rightarrow 1\leqslant 1+t^2\leqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}\leqslant 1 \Rightarrow \frac{t^{2n+2}}{2}\leqslant\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leqslant t^{2n+2} \\ \underset{0\leqslant 1}{\Rightarrow}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{2}dt &\leqslant \int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}dt \Rightarrow \left[\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)}\right]_{t=0}^{t=1}\leqslant\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\leqslant\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_{t=0}^{t=1} \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2(2n+3)}}_{\geqslant 0}\leqslant\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\leqslant\frac{1}{2n+3}\Rightarrow 0\leqslant\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t}dt\leqslant\frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

Puisque l'on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+3} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t}dt = 0$. La suite $((-1)^{n+1})_n$ étant bornée, on en déduit que $R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t}dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. L'égalité $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt = S_n + R_n$ montre alors que $S_n \underset{n\to+\infty}{\to}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt \Leftrightarrow S = \int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ (puisque S désigne la limite de la suite S)

Partie II

1. Pour la première inégalité, il s'agit d'encadrer une intégrale, pour la seconde, on utilisera la relation de Chasles et on devra à nouveau encadrer une intégrale

$$\begin{aligned}\forall u &\in [0,1],\quad 0\leqslant u^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant -u^2\leqslant -0\Rightarrow 0\leqslant 1-u^2\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\sqrt{1-u^2}\leqslant 1 \\ &\Rightarrow \int_0^a 0du\leqslant\int_0^a\sqrt{1-u^2}du\leqslant\int_0^a 1du\Rightarrow 0\leqslant K(a)\leqslant\underbrace{a}_{\to 0\text{ quand }a\to 0}\Rightarrow\lim_{a\to 0^+}K(a)=0 \\ K(1)-K(a) &= \int_0^1\sqrt{1-u^2}du-\int_0^a\sqrt{1-u^2}du\underset{\text{Chasles}}{=}\int_a^1\sqrt{1-u^2}du\Rightarrow\int_a^1 0du\leqslant\int_a^1\sqrt{1-u^2}du\leqslant\int_a^1 1du \\ &\Rightarrow 0\leqslant K(1)-K(a)\leqslant\underbrace{1-a}_{\to 0\text{ quand }a\to 1^-}\Rightarrow\lim_{a\to 1^-}[K(1)-K(a)]=0\Rightarrow\lim_{a\to 1^-}K(a)=K(1)\end{aligned}$$

2. Par relation de Chasles, on a

$$J(a)=\int_{1/a}^{a}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{1}^{a}\frac{1}{1+u^2}du+\int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{1}^{a}\frac{1}{1+u^2}du-\int_{1}^{1/a}\frac{1}{1+u^2}du=I(a)-I\left(\frac{1}{a}\right)$$

3. $u=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{u}$, $\quad du=\left(\dfrac{1}{t}\right)'dt\Leftrightarrow du=-\dfrac{1}{t^2}dt$, quand $u=1$, $t=1$, quand $u=a$, $t=\dfrac{1}{a}$

$$I(a)=\int_{a}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=-\int_{1/a}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=-I\left(\frac{1}{a}\right)$$

4. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$L(a)-M(a)=\int_{0}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\right]du=\int_{0}^{a}\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}}du=\int_{0}^{a}\sqrt{1-u^2}du=K(a)\qquad\left(\frac{h}{\sqrt{h}}=\sqrt{h}\right)$$

5. Etant donné que l'on ne peut primitiver la fonction $u\mapsto\sqrt{1-u^2}$, on remarque astucieusement que $\sqrt{1-u^2}=1\times\sqrt{1-u^2}$ et on va intégrer $u\mapsto 1$ et dériver $u\mapsto\sqrt{1-u^2}$.

$$K(a)=\int_{0}^{a}1\sqrt{1-u^2}du=\left[u\sqrt{1-u^2}\right]_{u=0}^{u=a}-\int_{0}^{a}u\times\frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2}}du=a\sqrt{1-a^2}+\int_{0}^{a}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du=a\sqrt{1-a^2}+M(a).$$

6. Les questions 4 et 5 nous montrent que

$$\left.\begin{array}{c}L(a)-M(a)=K(a)\\K(a)=a\sqrt{1-a^2}+M(a)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\quad\left.\begin{array}{c}L(a)=M(a)+K(a)\\M(a)=-a\sqrt{1-a^2}+K(a)\end{array}\right\}\Rightarrow L(a)=-a\sqrt{1-a^2}+2K(a)$$

et la question 1 nous permet alors d'affirmer que

$$\lim_{a\to0}L(a)=\lim_{a\to0}\left[-a\sqrt{1-a^2}+2K(a)\right]=2\lim_{a\to0}K(a)=0\quad\lim_{a\to0}L(a)=\lim_{a\to1}\left[-a\sqrt{1-a^2}+2K(a)\right]=2\lim_{a\to1}K(a)=2K(1)$$

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\Leftrightarrow u=\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-1}$:

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\underset{y\geqslant0}{\Leftrightarrow}y^2=\frac{1}{1+u^2}\Leftrightarrow 1+u^2=\frac{1}{y^2}\Leftrightarrow u^2=\frac{1}{y^2}-1\underset{u\geqslant0}{\Leftrightarrow}u=\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}$$

Changement de variable :

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\Leftrightarrow u=\sqrt{\frac{1}{y^2}-1},\quad du=\frac{\left(\frac{1}{y^2}-1\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}dy\Leftrightarrow du=\frac{-\frac{2}{y^3}}{2\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}dy\\u&=a\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad u=1/a\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}}\\J(a)&=\int_{1/a}^{a}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}^{1/\sqrt{1+a^2}}y^2\times\frac{-\frac{2}{y^3}}{2\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}dy=-\int_{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}^{1/\sqrt{1+a^2}}\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}dy\\&=\int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}dy=\int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}}dy=\int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}}dy=\int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la relation de Chasles, on a

$$\int_{1/\sqrt{1+a^2}}^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int_0^{1/\sqrt{1+(1/a)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy - \int_0^{1/\sqrt{1+a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = L\left(\frac{1}{\sqrt{1+(1/a)^2}}\right) - L\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

D'autre part, en combinant les questions 2 et 3, on a

$$J(a) = -I(a) + I\left(\frac{1}{a}\right) = -2I\left(\frac{1}{a}\right)$$

ce qui démontre l'égalité attendue

$$(1) \qquad -2I\left(\frac{1}{a}\right) = L\left(\frac{1}{\sqrt{1+(1/a)^2}}\right) - L\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

8. Quand $a \to +\infty$, $\dfrac{1}{a} \to 0$ donc $-2I\left(\dfrac{1}{a}\right) \to -2I(0) = -2\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du.$

   Quand $a \to +\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+(1/a)^2}} \to 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \to 0$, la question 6 nous permet alors d'écrire

$$\lim_{a\to+\infty} L\left(\frac{1}{\sqrt{1+(1/a)^2}}\right) - L\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) = 2K(1) - 0 = 2K(1) = 2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

   Par conséquent, on en déduire que

$$2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

9. (a) L'équation du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2+y^2=1$, son intérieur est défini par l'inéquation $x^2+y^2 \leqslant 1$.
   L'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 est égale à $\pi 1^2 = \pi$.

   (b) Si (x,y) est dans le quart de plan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$, on sait que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ et l'on a donc

$$x^2+y^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow y^2 \leqslant 1-x^2 \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow} y \leqslant \sqrt{1-x^2}$$

   donc on a bien égalitéentre les deux ensembles.

   (c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ représente l'aire de la partie de plan définie par $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$ (« l'aire sous la courbe $y=\sqrt{1-x^2}$ entre les points d'abscisse $x=0$ et $x=1$ ») qui n'est autre que le quart de cercle dont l'aire vaut $\dfrac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du = \frac{\pi}{4}$, ce qui nous permet d'écrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$.

   (d) La question 3 de la partie I nous donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Partie III

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$.

   Initialisation $n=0$:

$$\left.\begin{array}{l} S_{2\times0+1} = S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{1}{2k+1} = (-1)^0\frac{1}{2\times0+1} + (-1)^1\frac{1}{2\times1+1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^0 \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{2}{(4\times0+1)(4\times0+3)} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = \sum_{k=0}^0 \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$ et montrons que $S_{2(n+1)+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \Leftrightarrow S_{2n+3} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$

$$\begin{aligned} S_{2n+3} &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} + \left(\underbrace{(-1)^{2n+2}}_{\text{exposant pair}} \frac{1}{2(2n+2)+1} + \underbrace{(-1)^{2n+3}}_{\text{exposant impair}} \frac{1}{2(2n+3)+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} + \left(\frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} + \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} \end{aligned}$$

Lorsque $k = n+1$,

$$(4k+1)(4k+3) = (4(n+1)+1)(4(n+1)+3) = (4n+5)(4n+7)$$

donc on a $S_{2n+3} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. D'après la question 2 de la partie I, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = S_{2n+1} + R_{2n+1} = S_{2n+1} - \int_0^1 \frac{t^{2(2n+1)+2}}{1+t^2} dt = S_{2n+1} - \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^2} dt \Rightarrow S_{2n+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^2} dt$$

puis la question 3 de la partie I nous donne

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^2} dt \leqslant \frac{1}{4n+5} \Leftrightarrow 0 \leqslant S_{2n+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leqslant \frac{1}{4n+5} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{4n+5} \underset{\times 4}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)} - \pi \leqslant \frac{4}{4n+5} \end{aligned}$$

3. Voici le code à entrer dans le tableur.

	A	B	valeurs numériques affichées (avec 9 décimales)
1	**n**	**suite $\mathbf{S}_{2n+1}$**	
2		=0	0,000000000
3	=0	=B2+8/((4*A3+1)*(4*A3+3))	2,666666667
4	=1	=B3+8/((4*A4+1)*(4*A4+3))	2,895238095
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1003	=1000	=B1002+8/((4*A1003+1)*(4*A1003+3))	3,141093153

On constate que la convergence est très lente ce qui est compatible avec la majoration de $\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)} - \pi$ par $\frac{4}{4n+5}$ qui est équivalent à $\frac{1}{n}$ en $+\infty$. Autrement dit, pour avoir une précision de 10^{-3}, il faut choisir approximativement $n = 10^3$!!

Etant donné que $0 \leqslant \sum_{k=0}^{1000} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)} - \pi \leqslant \frac{4}{4 \times 1000 + 5} \simeq 10^{-3}$, on en déduit que 3,141093153 est une valeur approchée à 10^{-3} près de π, autrement dit, $0 \leqslant 3,141 - \pi \leqslant 10^{-3}$.

Si l'on veut obtenir la quatrième décimale, il faut calculer $\sum_{k=0}^{10^4} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)}$, si l'on veut les neuf décimales, il faut calculer $\sum_{k=0}^{10^9} \frac{8}{(4k+1)(4k+3)}$, ce qui est légèrement pénible par tableur.

Un langage de programmation adéquat, par exemple le Turbo-Pascal, s'avéra plus efficace et moins pénible à implémenter.