correction de l'exercice 1

1. (a) Un calcul direct nous donne $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J$.

Il en découle que

$$\begin{aligned} J^3 &= J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 3^2 J \quad J^4 = J^3 \times J = 3^2 J \times J = 3^2 J^2 = 3^3 J \\ J^5 &= J^4 \times J = 3^3 J \times J = 3^3 J^2 = 3^4 J \end{aligned}$$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad J^n = 3^{n-1} J$. Pour le prouver, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : J^n = 3^{n-1} J$

Initialisation $n = 1$: $J^1 = J$ et $3^{1-1} J = 3^0 J = J$ donc $J^1 = 3^{1-1} J$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_1)$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $J^n = 3^{n-1} J$ et montrons que $J^{n+1} = 3^n J$

$$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1} J \times J = 3^{n-1} J^2 = 3^n J$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence

(b) On procède par identification des coefficients

$$\begin{aligned} M &= aI + bJ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{2} I + \frac{1}{6} J} \\ M \left(2I - \frac{1}{3} J \right) &= \left(\frac{1}{2} I + \frac{1}{6} J \right) \left(2I - \frac{1}{3} J \right) = I + \frac{1}{3} J - \frac{1}{6} J - \frac{1}{18} J^2 = I + \frac{1}{6} J - \frac{1}{6} = I \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice M est inversible et son inverse est

$$M^{-1} = 2I - \frac{1}{3} J = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J$.

on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J$

Initialisation $n = 0$: $M^0 = I$ et $\frac{1}{2^0} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^0} \right) J = I$ donc $M^0 = \frac{1}{2^0} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^0} \right) J$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J$ et montrons que $M^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) J$. En utilisant la question 1.b), on a

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = \left[\frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J \right] \left[\frac{1}{2} I + \frac{1}{6} J \right] = \frac{1}{2^{n+1}} I + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J + \frac{1}{6 \times 2^n} I + \frac{1}{18} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J^2 \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} I + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 2^n} + \frac{1}{6 \times 2^n} \right) J + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J = \frac{1}{2^{n+1}} I + \frac{1}{6} J + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 2^n} \right) J \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} I + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \times 2^n} \right) J = \frac{1}{2^{n+1}} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2 \times 2^n} \right) J = \frac{1}{2^{n+1}} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) J \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence

En particulier, la matrice M^n s'écrit

$$M^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

En faisant $n = -1$ dans la formule, on obtient l'égalité

$$M^{-1} = \frac{1}{2^{-1}}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{-1}}\right)J = 2I + \frac{1}{3}(1-2)J = 2I - \frac{1}{3}J$$

qui est vraie d'après la question 1.b).

2. (a) On procède par un calcul direct

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix}18 & 9 & 9\\ 9 & 18 & 9\\ 9 & 9 & 18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
M^2 - \frac{3}{2}M &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}I\\
M\left(M - \frac{3}{2}I\right) &= -\frac{1}{2}I \Leftrightarrow M\left(-2M + 3I\right) = I
\end{aligned}$$

donc la matrice M est inversible.

Remarque : son inverse est la matrice $M^{-1} = -2M + 3I = \begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$

(b) Montrer que pour entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI$.
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI$
Initialisation $n = 0$: $M^0 = I$ et recherchons deux réels a_0 et b_0 tel que $a_0M + b_0I = I$. On vérifie que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ convient bien puisque $0 \times M + 1 \times I = I = M^0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$

$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(a_nM + b_nI\right)M = a_nM^2 + b_nM = a_n\left(\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I\right) + b_nM = \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right)M - \frac{1}{2}a_nI$$

En choisissant les réels $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, on a bien $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

(c) D'après la question 2.b), on a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + b_n\\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n\end{cases}$ Puisque $\begin{cases} a_0 = 0\\ b_0 = 1\end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} a_1 = 1\\ b_1 = 0\end{cases}$

(d) $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$.
Equation caractéristique : $x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et 1.
Il existe donc deux réels c et d tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta 1^n = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta$

Détermination de α et β :

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^0+\beta=a_0 \\ \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^1+\beta=a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \frac{1}{2}\alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_1-L_2 \\ L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow b_n=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad M^n=\left[2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]M+\left[-1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]I=\begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. (a) Un calcul direct nous donne $PQ=3I\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{3}Q\right)=I$ donc la matrice P est inversible et son inverse vaut

$$P^{-1}=\frac{1}{3}Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En multipliant de part et d'autre par P^{-1} "à gauche" et P "à droite", on obtient $P^{-1}MP=N$ puis un calcul direct nous donne

$$P^{-1}M=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad N=P^{-1}MP=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\quad M^n=PN^nP^{-1}$ puis donner les neuf coefficients de M^n.
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)\quad M^n=PN^nP^{-1}$
Initialisation $n=0$: $M^0=I$ et $PN^0P^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$ donc $M^0=PN^0P^{-1}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $M^n=PN^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1}=PN^{n+1}P^{-1}$.

$$M^{n+1}=M^n\times M=PN^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I}NP^{-1}=PN^nNP^{-1}=PN^{n+1}P^{-1}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence

Puisque N est une matrice diagonale, il est immédiat que $N^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'écrire

$$PN^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{2^n} & 1 & -\frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & 1 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \qquad M^n=PN^nP^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. (a) L'évènement A_{n+1} dépend de la position du mobile à l'instant n, c'est-à-dire des évènements A_n, B_n, C_n qui forment un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{6}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) \\
P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) \\
P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{6}P(A_n) + \frac{1}{6}P(B_n) + \frac{2}{3}P(C_n)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n \end{cases}$

(b) Il est immédiat que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Pour l'autre égalité, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n X_0$

Initialisation $n = 0 :$ $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ et montrons que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence. puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

(c) En explicitant l'égalité précédente, on a

$$\begin{cases} a_n = a_0 \left(\frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + b_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + c_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) \\ b_n = a_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + b_0 \left(\frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + c_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) \\ c_n = a_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + b_0 \left(-\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) + c_0 \left(\frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \right) \end{cases}$$

Il est immédiat que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3}$$

car, la famille A_0, B_0, C_0 formant un système complet d'évènements, on a

$$P(A_0) + P(B_0) + P(C_0) = 1 \Leftrightarrow a_0 + b_0 + c_0 = 1$$