**correction de l'exercice 1**

1. La probabilité conditionnelle $P_{U_j}(R_k)$ signifie que l'on pioche dans l'urne $U_j$, qui contient $j$ boules rouges et $3-j$ boules blanches. Dans cette urne, on pioche avec remise 2 boules donc $k$ sont rouges. En particulier, dans l'urne $U_0$ il est impossible de piocher la moindre boule rouge et dans l'urne $U_3$, il est impossible de piocher la moindre boule non rouge. En notant $R$ l'évènement "piocher une boule rouge à la pioche", on a
$P_{U_0}(R_0) = P(\overline{R}\overline{R}\overline{R}) = 1 \times 1 = 1$
$P_{U_0}(R_1) = P_{U_0}(R_2) = P_{U_0}(R_3) = 0$
$P_{U_1}(R_0) = P(\overline{R}\overline{R}\overline{R}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
$P_{U_1}(R_1) = P(R\overline{R}\overline{R}) + P(\overline{R}R\overline{R}) + P(\overline{R}\overline{R}R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
$P_{U_1}(R_2) = P(RR\overline{R}) + P(R\overline{R}R) + P(\overline{R}RR) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
$P_{U_1}(R_3) = P(RRR) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$P_{U_2}(R_0) = P(\overline{R}\overline{R}\overline{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$P_{U_2}(R_1) = P(R\overline{R}\overline{R}) + P(\overline{R}R\overline{R}) + P(\overline{R}\overline{R}R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
$P_{U_2}(R_2) = P(RR\overline{R}) + P(R\overline{R}R) + P(\overline{R}RR) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
$P_{U_2}(R_3) = P(RRR) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
$P_{U_3}(R_0) = P_{U_3}(R_1) = P_{U_3}(R_2) = 0$
$P_{U_3}(R_3) = 1$
ce que l'on peut résumer par

$$\begin{array}{llll}
P_{U_0}(R_0) = 1 & P_{U_0}(R_1) = 0 & P_{U_0}(R_2) = 0 & P_{U_0}(R_3) = 0 \\
P_{U_1}(R_0) = \frac{8}{27} & P_{U_1}(R_1) = \frac{4}{9} & P_{U_1}(R_2) = \frac{2}{9} & P_{U_1}(R_3) = \frac{1}{27} \\
P_{U_2}(R_0) = \frac{1}{27} & P_{U_2}(R_1) = \frac{2}{9} & P_{U_2}(R_2) = \frac{4}{9} & P_{U_2}(R_3) = \frac{8}{27} \\
P_{U_3}(R_0) = 0 & P_{U_3}(R_1) = 0 & P_{U_3}(R_2) = 0 & P_{U_3}(R_3) = 1
\end{array}$$

**Remarque** : pour tout entier $j$, on a bien $\sum_{k=0}^{3} P_{U_j}(R_k) = 1$, ce qui est normal puisque l'application $A \mapsto P_{U_j}(A)$ est une probabilité.

2. La famille $(U_0, U_1, U_2, U_3)$ forme un système complet d'évènements, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
P(R_0) &= P(U_0 \cap R_0) + P(U_1 \cap R_0) + P(U_2 \cap R_0) + P(\underbrace{U_3 \cap R_0}_{\text{impossible}}) \\
&= P(U_0)P_{U_0}(R_0) + P(U_1)P_{U_1}(R_0) + P(U_2)P_{U_2}(R_0) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{27} = \frac{1}{3} \\
P(R_1) &= P(\underbrace{U_0 \cap R_1}_{\text{impossible}}) + P(U_1 \cap R_1) + P(U_2 \cap R_1) + P(\underbrace{U_3 \cap R_1}_{\text{impossible}}) \\
&= P(U_1)P_{U_1}(R_1) + P(U_2)P_{U_2}(R_1) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6} \\
P(R_2) &= P(\underbrace{U_0 \cap R_2}_{\text{impossible}}) + P(U_1 \cap R_2) + P(U_2 \cap R_2) + P(\underbrace{U_3 \cap R_2}_{\text{impossible}}) \\
&= P(U_1)P_{U_1}(R_2) + P(U_2)P_{U_2}(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6} \\
P(R_3) &= P(\underbrace{U_0 \cap R_3}_{\text{impossible}}) + P(U_1 \cap R_3) + P(U_2 \cap R_3) + P(U_3 \cap R_3) \\
&= P(U_1)P_{U_1}(R_3) + P(U_2)P_{U_2}(R_3) + P(U_3)P_{U_3}(R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Remarque** : on a bien $\sum_{k=0}^{3} P(R_k) = 1$.

3. On utilise simplement la classique formule $P_{R_k}(U_j) = \frac{P(R_k \cap U_j)}{P(R_k)} = \frac{P(U_j \cap R_k)}{P(R_k)} = \frac{P(U_j)P_{U_j}(R_k)}{P(R_k)}$ (puisque l'on ne peut réinterpréter, la connaissance du nombre de boules rouges laisse une indétermination sur l'urne choisie sur la

pioche)

$$P_{R_0}(U_0)=\frac{\frac{1}{4}\times 1}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\quad P_{R_0}(U_1)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{8}{27}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\quad P_{R_0}(U_2)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{36}\quad P_{R_0}(U_3)=0$$

$$P_{R_1}(U_0)=0\quad P_{R_1}(U_1)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{3}\quad P_{R_1}(U_2)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}\quad P_{R_1}(U_3)=0$$

$$P_{R_2}(U_0)=0\quad P_{R_2}(U_1)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}\quad P_{R_2}(U_2)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{3}\quad P_{R_2}(U_3)=0$$

$$P_{R_3}(U_0)=0\quad P_{R_3}(U_1)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{36}\quad P_{R_3}(U_2)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{8}{27}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\quad P_{R_3}(U_3)=\frac{\frac{1}{4}\times 1}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

**Remarque** : Pour tout entier $k$, on a $\sum_{j=0}^{3} P_{R_k}(U_j)=1$ (car l'application $A\mapsto P_{R_k}(A)$ est une probabilité)

**correction de l'exercice 2**

1. Puisqu'initialement les deux boules noires sont dans l'urne $A$, on en déduit immédiatement que $x_0=1$ et $y_0=z_0=0$.
   A l'issue de la première épreuve, l'urne $A$ contient nécessairement 1 B et 1 N et l'urne $B$ contient également 1 B et 1 N, ce qui entraine que $x_1=z_1=0$ et $y_1=1$.
   D'après le contenu de l'urne A à l'issue de la première épreuve, à l'issue de la seconde épreuve, pour l'urne $A$ contienne

   - 0 N, il est indispensable de piocher dans l'urne $A$ la boule noire (probabilité $\frac{1}{2}$) et dans l'urne $B$ la boule noire (probabilité $\frac{1}{2}$). Ainsi la probabilité d'avoir 0 N à l'issue de la seconde épreuve vaut $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ donc $x_2=\frac{1}{4}$
   - 1 N, il est indispensable de piocher soit dans l'urne $A$ la boule noire (probabilité $\frac{1}{2}$) et dans l'urne $B$ la boule noire (probabilité $\frac{1}{2}$), soit dans l'urne $A$ la boule blanche (probabilité $\frac{1}{2}$) et dans l'urne $B$ la boule blanche (probabilité $\frac{1}{2}$) Ainsi la probabilité d'avoir 1 N à l'issue de la seconde épreuve vaut $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ donc $y_2=\frac{1}{2}$
   - 2 N, il est indispensable de piocher dans l'urne $A$ la boule blanche (probabilité $\frac{1}{2}$) et dans l'urne $B$ la boule blanche (probabilité $\frac{1}{2}$). Ainsi la probabilité d'avoir 2 N à l'issue de la seconde épreuve vaut $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ donc $z_2=\frac{1}{4}$

2. Voici le tableau récapitulant les valeurs des neufs probabilités conditionnelles

$P_A(B)$ :

| $A\backslash B$ | $X_{n+1}$ | $Y_{n+1}$ | $Z_{n+1}$ |
|---|---|---|---|
| $X_n$ | 0 | 1 | 0 |
| $Y_n$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |
| $Z_n$ | 0 | 1 | 0 |

**Justification des calculs de probabilités conditionnelles**

$P_{X_n}(X_{n+1})$ : *on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2N), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange)*

$P_{X_n}(Y_{n+1})$ : *on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir 1 boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui arrive nécessairement (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange) donc l'évènement est certain*

$P_{X_n}(Z_{n+1})$ : *on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange donc l'urne A ne contiendra qu'une boule noire et non deux)*

<u>$P_{Y_n}(X_{n+1})$</u> : *on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la noire dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la blanche dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

<u>$P_{Y_n}(Y_{n+1})$</u> : *on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir une boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la blanche dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la blanche dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) <u>ou</u> on pioche la noire dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la noire dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

<u>$P_{Y_n}(Z_{n+1})$</u> : *on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la blanche dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la noire dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

<u>$P_{Z_n}(X_{n+1})$</u> : *on dispose de deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 B dans l'urne B et 1 N dans l'urne A puis on échange donc l'urne A contiendra une boule noire et non zéro)*

<u>$P_{Z_n}(Y_{n+1})$</u> : *on dispose de deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir une boule noire dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui arrive nécessairement (on pioche nécessairement 1 B dans l'urne B et 1 N dans l'urne A puis on échange) donc l'évènement est certain*

<u>$P_{X_n}(Z_{n+1})$</u> : *on dispose deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange.(donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange)*

3. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $X_n, Y_n, Z_n$ et en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}) &= P(\underbrace{X_n \cap X_{n+1}}_{\text{impossible}}) + P(Y_n \cap X_{n+1}) + P(\underbrace{Z_n \cap X_{n+1}}_{\text{impossible}}) = P(Y_n)P_{Y_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{4}P(Y_n) \\
P(Y_{n+1}) &= P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = P(X_n)P_{X_n}(Y_{n+1}) + P(Y_n)P_{Y_n}(Y_{n+1}) + P(Z_n)P_{Z_n}(Y_{n+1}) \\
&= P(X_n) + \frac{1}{2}P(Y_n) + P(Z_n) \\
P(Z_{n+1}) &= P(\underbrace{X_n \cap Z_{n+1}}_{\text{impossible}}) + P(Y_n \cap Z_{n+1}) + P(\underbrace{Z_n \cap Z_{n+1}}_{\text{impossible}}) = P(Y_n)P_{Y_n}(Z_{n+1}) = \frac{1}{4}P(Y_n)
\end{aligned}$$

ce qui implique les égalités suivantes $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}y_n \\ y_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}y_n + z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}y_n \end{cases}$

4. Il semble que les trois suites soient convergentes, la suite $y$ convergeant vers un réel égal à $0.666666666 \pm 10^{-9}$ et les deux autres suites vers un réel égal à $0.166666666 \pm 10^{-9}$

5. On procède par récurrence en posant

$$(\mathcal{P}_n) : x_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad y_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

**Initialisation** $n=1$ :

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1=0 & : & \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0 \\ y_1=1 & : & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \\ z_1=0 & : & \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} \\ y_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} \\ z_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} \end{array}\right.$$

donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$ i.e. supposons que

$$x_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad y_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad z_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

et montrons que

$$x_{n+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad y_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad z_{n+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Un calcul direct nous donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{1}{4}y_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \\ y_{n+1} & = & x_n+\frac{1}{2}y_n+z_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ & = & \frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{4}y_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \end{array}\right.$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Puisque $-\frac{1}{2}\in]-1,1[$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}z_n=\frac{1}{6}$ et $\lim_{n\to+\infty}y_n=\frac{2}{3}$, ce qui confirme la constatation de la question 4

**correction de l'exercice 3**
On introduit la fonction $f: x\mapsto \ln(2-x)-x$.
Cette fonction est continue et dérivable sur $]-\infty,2[$ (car $2-x>0$ sur cet intervalle et $x\mapsto\ln x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$).
Sa dérivée vaut $f'(x)=\frac{(2-x)'}{2-x}-1=\frac{-1}{2-x}-1=\frac{x-3}{2-x}<0$ sur $]-\infty,2[$.
Par conséquent, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,2[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,2[$ sur $f(]-\infty,2[)=]-\infty,+\infty[$.
**Justification des calculs de limites** :

$$-\infty \quad : \quad f(x)=\ln(2-x)-x=\ln(-x(1-\frac{2}{x}))-x=\ln(-x)+\ln(1-\frac{2}{x})-x=\underbrace{-x}_{\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{\ln(-x)}{-x}}_{\to0}+\ln(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to0})+1\right]\underset{x\to-\infty}{\to}+\infty$$

$$2 \quad : \quad f(x)=\overbrace{\ln(\underbrace{2-x}_{\to0^+})}^{\to-\infty}-\underbrace{x}_{\to2}\underset{x\to2^-}{\to}-\infty$$

Puisque $0\in]-\infty,+\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution sur $]-\infty,2[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par $f$).
Pour justifier que $0<\alpha<1$, on compare les images par $f$

$$f(0)=\ln(2)>0, \quad f(\alpha)=0 \quad (\alpha \text{ solution de } f(x)=0) \quad f(1)=\ln1-1=-1$$

donc $f(0)>f(\alpha)>f(1)$. La fonction $f$ étant strictement croissante et bijective, on en déduit que $0<\alpha<1$.