correction de l'exercice 1

On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Initialisation $n = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=2}^{3-1} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=2}^{2} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = 1 \\ \displaystyle\frac{3(3-1)(3-2)}{6} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=2}^{3-1} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{3(3-1)(3-2)}{6}$$

donc $(\mathcal{P}_3)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} &= \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2}\right) + \sum_{k=n}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n-2}{3} + 1\right] = \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n-2+3}{3}\right] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Initialisation $n = 0$:

$$\left.\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} = 0 \qquad 2 - \frac{0+2}{2^0} = 2 - 2 = 0\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{0+2}{2^0}$$

donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \underset{\mathcal{P}_n}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ avec $a_1 = a_2 = 1$: Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2 linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est $x^2 = x + 2$ dont les racines sont $x = -1$ et $x = 2$, ce qui implique l'existence de deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(-1)^1 + \beta 2^1 = 1 \\ \alpha(-1)^2 + \beta 2^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -3\alpha = 1 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 6\beta = 2 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$

$\forall j \in \mathbb{N}, \quad b_{j+1} = \dfrac{2}{3}b_j + 1$: Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. $L = \dfrac{2}{3}L + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}L = 1 \Leftrightarrow L = 3$.

On introduit la suite auxiliaire v définie par : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad v_j = b_j - 3 \Leftrightarrow b_j = v_j + 3$

$$v_{j+1} = b_{j+1} - 3 = \frac{2}{3}b_j + 1 - 3 = \frac{2}{3}b_j - 2 = \frac{2}{3}(v_j + 3) - 2 = \frac{2}{3}v_j$$

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}, \quad v_j = \left(\frac{2}{3}\right)^j v_0 \Leftrightarrow b_j - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^j (b_0 - 3) \Leftrightarrow b_j = 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^j (b_0 - 3)$$

correction de l'exercice 3

Il est immédiat que $u_1 = -u_0 + \dfrac{1}{0+1} = -u_0 + 1$ (*en particulier, on a* $-1 = -u_1 - u_0$)

On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : (-1)^n u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Initialisation $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^1 u_1 - u_0 = -u_1 - u_0 = -1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^1 u_1 - u_0 = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k}$$

donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $(-1)^n u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et montrons que $(-1)^{n+1} u_{n+1} - u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} u_{n+1} - u_0 &= (-1)^{n+1} \left(-u_n + \frac{1}{n+1} \right) - u_0 = (-1)^{n+2} u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - u_0 \underset{(-1)^2=1}{=} (-1)^n u_n - u_0 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad (\text{d'après } \mathcal{P}_n) \quad = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 4

Voici le code à entrer dans le tableur. Pour les valeurs numériques, voir soit le fichier Tableur, soit le corrigé dédié.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite a**	**suite b**	**suite c**	**suite d**
2					
3	0	1	1	1	1
4	1	=(B3)/(1+(B3)^2)	1	=((A3)*(D3))/(1+A3+(D3)^2)	=((E3)+4)^(1/2)
5	2	=(B4)/(1+(B4)^2)	=(C3+C2)/(1+(C3)*(C2))	=((A4)*(D4))/(1+A4+(D4)^2)	=((E4)+4)^(1/2)
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=(B51)/(1+(B51)^2)	=(C51+C50)/(1+(C51)*(C50))	=((A51)*(D51))/(1+A51+(D51)^2)	=((E51)+4)^(1/2)
53	50			=((A52)*(D52))/(1+A52+(D52)^2)	

	A	**B**	**C**	**D**
1	**n**	**suite e**	**suite f**	**suite g**
2				
3	0		1	
4	1	1	1	1
5	2	=(A4)*(B4)	1	=(D4)+(A4)
6	3	=(A5)*(B5)	=((C5)+(C4)+(C3))/(1+(C3)*(C4)*(C5))	=(D5)+(A5)
	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=(A51)*(B51)	=((C51)+(C50)+(C49))/(1+(C51)*(C50)*(C49))	⋮
53	50	=(A52)*(B52)		=(D52)+(A52)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite h**	**suite i**	**suite j**	**suite k**
2					
3	0	0	0	3	0
4	1	=(B3)+1/(5^(A3))	=ln(2*(C3)+3)	=(1/2)*((D3)+(A3))	=2+(E3)^(1/2)
5	2	=(B4)+1/(5^(A4))	=ln(2*(C4)+3)	=(1/2)*((D4)+(A4))	=2+(E4)^(1/2)
6	3	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=(B51)+1/(5^(A51))	=ln(2*(C51)+3)	=(1/2)*((D51)+(A51))	=2+(E51)^(1/2)

	A	B	C
1	n	suite α	suite β
2			
3	0		
4	1	1	2
5	2	=(B4)+(C4))/((A4)*(A5))	=(C4)+(B4))/((A4)*(A5))
	⋮	⋮	⋮
52	49	=(B51)+(C51))/((A51)*(A52))	=(C51)+(B51))/((A51)*(A52))

	A	B	C
1	n	suite δ	suite γ
2			
3	0	3	1
4	1	5	2
5	2	=2*(C3)*(B4)+(B3)/(C4)	=((C4)+(C3)+4*(B4))/(1+(B3)^2)
⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=2*(C50)*(B51)+(B50)/(C51)	=((C51)+(C50)+4*(B51))/(1+(B50)^2)

	A	B	C	D
1	n	suite u	suite w	suite v
2				
3	0	1	1	1
4	1	3	1	2
5	2	=((B4)*(B3))^(1/2)	=(C3+C2)/(2+(C3)*(C2))	3
6	3	⋮	⋮	=((D5)*(D4)*(D3))^(1/3)
	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=((B51)*(B50))^(1/2)	=(C51+C50)/(2+(C51)*(C50))	=((D51)*(D50)*(D49))^(1/3)

	A	B
1	n	suite z
2		
3	0	1
4	1	2
5	2	=(1+(E4)+(E3))/((E4)^2+(A4)*(E3)^2)
	⋮	⋮
52	49	=(1+(E51)+(E50))/((E51)^2+(A51)*(E50)^2)

correction de l'exercice 5

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = (1+t)C_n$

   (b) La suite $(C_n)_n$ est géométrique de raison $(1+t)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = (1+t)^n C_0 = (1+t)^n K$.

2. (a) i. Au 31 décembre de la 1$^{\text{er}}$ année de placement : l'intérêt t est appliqué à la somme présente sur le compte au 1$^{\text{er}}$ janvier de la 1$^{\text{er}}$ année, qui est égale à K, donc on dispose d'une somme de $(1+t)K$.

   ii. Au 31 décembre de la 2$^{\text{ème}}$ année de placement : l'intérêt t est appliqué à la somme présente sur le compte au 1$^{\text{er}}$ janvier de la 2$^{\text{ème}}$ année, c'est-à-dire la somme présente au 31 décembre de la 1$^{\text{er}}$ année auquel est ajouté l'annuité K. Par conséquent, on applique l'intérêt t à la somme $(1+t)K + K$ donc on dispose au 31 décembre de la somme
$$(1+t)\left[(1+t)K + K\right] = (1+t)^2 K + (1+t)K$$

   iii. Au 31 décembre de la 3$^{\text{ème}}$ année de placement : l'intérêt t est appliqué à la somme présente sur le compte au 1$^{\text{er}}$ janvier de la 3$^{\text{ème}}$ année, c'est-à-dire la somme présente au 31 décembre de la 2$^{\text{ème}}$ année auquel est ajouté l'annuité K. Par conséquent, on applique l'intérêt t à la somme $(1+t)^2K + (1+t)K + K$ donc on dispose au 31 décembre de la somme
$$(1+t)\left[(1+t)^2 K + (1+t)K + K\right] = (1+t)^3 K + (1+t)^2 K + (1+t)K$$

(b) Au 31 décembre de la $(n+1)^{\text{ème}}$ année de placement, on applique le taux d'intérêt t à la somme présente au 1^{er} janvier de la $(n+1)^{\text{ème}}$ année, c'est-à-dire la somme présente au 31 décembre de la $n^{\text{ème}}$ année auquel est ajouté l'annuité K, ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = (1+t)(D_n + K)$$

(c) <u>Première méthode</u> : La suite $(D_n)_n$ est arithmético-géométrique.
Recherche de la constante L :

$$L = (1+t)(L+K) \Leftrightarrow -tL = (1+t)K \Leftrightarrow L = -\frac{(1+t)K}{t}$$

On introduit la suite v définie par :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n &= D_n - \left(-\frac{(1+t)K}{t}\right) = D_n + \frac{(1+t)K}{t} \Leftrightarrow D_n = v_n - \frac{(1+t)K}{t} \\
v_{n+1} &= D_{n+1} + \frac{(1+t)K}{t} = (1+t)(D_n+K) + \frac{(1+t)K}{t} = (1+t)D_n + K(1+t)\left[1+\frac{1}{t}\right] \\
&= (1+t)D_n + \frac{K(1+t)^2}{t} = (1+t)\left(v_n - \frac{(1+t)K}{t}\right) + \frac{K(1+t)^2}{t} = (1+t)v_n \\
v_n &= (1+t)^n v_0 \Leftrightarrow D_n + \frac{(1+t)K}{t} = (1+t)^n \left(\underbrace{D_0}_{=0} + \frac{(1+t)K}{t}\right) \Leftrightarrow D_n = \frac{(1+t)^{n+1}K}{t} - \frac{(1+t)K}{t} \\
&\Leftrightarrow D_n = \frac{(1+t)K}{t}\left[(1+t)^n - 1\right] = K(1+t).\frac{(1+t)^n-1}{t}
\end{aligned}$$

<u>Deuxième méthode</u> : On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : D_n = K(1+t).\dfrac{(1+t)^n-1}{t}$.
Initialisation $n=0$: $D_0 = 0$ (on n'a rien placé à début de l'année 0 donc on n'a rien en fin d'année !!)
$K(1+t).\dfrac{(1+t)^0-1}{t} = K(1+t).\dfrac{1-1}{t} = 0$ donc $D_0 = K(1+t).\dfrac{(1+t)^0-1}{t}$ et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $D_n = K(1+t).\dfrac{(1+t)^n-1}{t}$ et montrons que $D_{n+1} = K(1+t).\dfrac{(1+t)^{n+1}-1}{t}$

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= (1+t)(D_n+K) \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} (1+t)\left[K(1+t).\frac{(1+t)^n-1}{t} + K\right] = (1+t)K\left[(1+t)\frac{(1+t)^n-1}{t} + 1\right] \\
&= K(1+t)\left[\frac{(1+t)(1+t)^n - (1+t)}{t} + 1\right] = K(1+t)\left[\frac{(1+t)^{n+1} - (1+t) + t}{t}\right] = K(1+t)\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}\right]
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. (a) L'énoncé nous demande de chercher K sachant que $C = D_{12} = 500\,000$ et $t = 0.09$. En utilisant la formule de la question 2.c), on a

$$500\,000 = K(1+0.09).\frac{(1+0.09)^{12}-1}{0.09} \Leftrightarrow K = \frac{500\,000}{(1+0.09)\times\dfrac{(1+0.09)^{12}-1}{0.09}} \simeq 22776$$

Par conséquent, il faut un versement annuel de 22 776 euros pour obtenir 500 000 euros en 12 ans avec un taux d'intérêt de 9 % par an.

(b) La jeune Julie, âgée de 25 ans, souhaite se constitue une épargne pour sa retraite, qu'elle prendra à 65 ans (enfin, elle l'espère ! :-)). Pour cela, elle compte placer chaque année une somme de 5 000 euros sur un compte rémunéré. Julie se demande s'il est possible de se constituer ainsi un capital de 1 million d'euros au bout des 40 ans de placement, c'est-à-dire existe-t-il un taux d'intérêt t tel que l'on ait

$$5000(1+t)\times\frac{(1+t)^{40}-1}{t} = 10^6 \Leftrightarrow (1+t)\times\frac{(1+t)^{40}-1}{t} = 200 \Leftrightarrow (1+t)\left[(1+t)^{40}-1\right] = 200t$$

(Remarquer que $t \neq 0$ pour que l'équation initiale ait un sens)

i. Pour commencer, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = (1+t)^{41} - (1+t) - 200t = (1+t)^{41} - 1 - 201t.$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) = 41(1+t)^{40} - 201$$
$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 41(1+t)^{40} - 201 > 0 \Leftrightarrow (1+t)^{40} > \frac{201}{41} \Leftrightarrow 1+t > \left(\frac{201}{41}\right)^{1/40} \Leftrightarrow t > \left(\frac{201}{41}\right)^{1/40} - 1$$

Si l'on note $\alpha = \left(\frac{201}{41}\right)^{1/40} - 1$, le tableau de variations de la fonction f est donc

t	0		α		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4.048 ± 10^{-3}	$\nearrow$	$+\infty$

ii. "*D'après le tableau des variations de f précédent, l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution sur $]0, +\infty[$ et cette solution est strictement supérieure à α*"
Pour justifier ceci rigoureusement, on invoque deux fois le théorème de bijection sur chaque intervalle $]0, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$ (α n'étant pas solution de $f(x) = 0$)
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ (car $f' < 0$ sur cet intervalle) donc elle réalise une bijection de $]0, \alpha[$ sur $f(]0, \alpha[) =]\underbrace{f(\alpha)}_{<0}, 0[$. Comme $0 \notin]f(\alpha), 0[$, l'équation $f(x) = 0$ admet aucune solution sur l'intervalle (0 n'admet pas d'antécédent sur cet intervalle).
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle) donc elle réalise une bijection de $]\alpha, +\infty[$ sur $f(]\alpha, +\infty[) =]\underbrace{f(\alpha)}_{<0}, +\infty[$. Comme $0 \in]f(\alpha), +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $]\alpha, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $]\alpha, +\infty[$).
Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\times$ (α n'étant pas solution de $f(x) = 0$ car $f(\alpha) \neq 0$)

iii. On compare les images, en remarquant que $t_0 > \alpha$ (cf. question 3.b.ii), $0.0075 > \alpha$ (d'après les données numériques), on a

$$f(0.0675) = -0.010 \pm 10^{-3}, \quad f(t_0) = 0, \quad f(0.0676) = 0.025 \pm 10^{-3} \Rightarrow f(0.0675) < f(t_0) < f(0.0676)$$

La fonction f étant bijective et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$, on a $0.0675 < t_0 < 0.0676$.

4. (a) C'est exactement le même raisonnement qu'à la question 2.b), sauf que les taux et les placements ne sont plus constants : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = (1 + t_n)(D_n + K_n)$

(b)

	A	**B**	**C**	**D**
1	**n**	**suite t**	**suite K**	**suite D**
2	0			0
3	1	=0,05+((A3)/400)*(1-(A3)/41)	=1100+200*A3	=(1+B3)*(D2+C3)
4	2	=0,05+((A4)/400)*(1-(A4)/41)	=1100+200*A4	=(1+B4)*(D3+C4)
	⋮	⋮	⋮	⋮
41	39	=0,05+((A41)/400)*(1-(A41)/41)	=1100+200*A41	=(1+B41)*(D40+C41)
42	40			=(1+B42)*(D41+C42)

Par cette méthode, Julie obtient 691507,37 euros au bout de 40 ans, soit une baisse de plus de 30 % du placement par rapport aux annuités et mensualités constantes.

Remarque : *On démontre que si l'on fixe à l'avance l'annuité moyenne K sur une période donnée et le taux d'intérêt moyen t sur la même période donnée (avec l'hyopthèse que les intérêts ne sont jamais négatifs), alors le placement est maximal si et seulement les annuités sont constantes égales à K et le taux d'intérêt est constant égal à t. Le pire placement étant fournissant une somme égale à K fois le nombre de période (autrement dit, on a rien gagné), pour le réalisé, il suffit de placer presque tout au début avec des taux microscopiques (mais non nuls) durant toute la durée sauf pour la dernière annuité où l'on place une somme ridicule avec le seul taux sur l'annuité permettant d'obtenir le moyenne t sur toute la période.*