correction de l'exercice 1

1. Pour que $\ln x$ existe, il est indispensable d'exiger que $x > 0$ et, pour que le quotient existe, il faut exiger que $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e^0 = 1$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\backslash\{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^{-1} \underset{f<0 \text{ en } 0^+}{=} -\lim\limits_{x\to 0} x = 0.$
On en déduit que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si} \quad x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\backslash\{1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$ (cf. question 1) donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et sa dérivée est donnée par :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f =]0, +\infty[\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \frac{1(\ln x) - x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x - 1$ et comme l'on a $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e^1 = e$, on en déduit le tableau de variation de f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Justification des limites</u> :
En 0^+ et en $+\infty$, cela découle de l'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty \text{ (resp. } 0^+)} x(\ln x)^{-1} = \lim\limits_{x\to+\infty \text{ (resp. } 0^+)} \ln x$.
En 1^-, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est négatif et tend vers 0 donc le quotient est négatif et tend vers $-\infty$ ("$\dfrac{1}{0^-} = -\infty$").
En 1^+, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est positif et tend vers 0 donc le quotient est positif et tend vers $+\infty$ ("$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$")

5. La fonction f est continue sur $]e, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. En outre, la combinaison des questions 3 et 4, montre que la dérivée de f est strictement positive sur $]e, +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Les deux conditions du théorème de bijection étant valides, on en déduit que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $f(]e, +\infty[) =]e, +\infty[$.

6. A la question, il a été démontré que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, on a
$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \frac{x}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \\ f(x) - 0 \times x &= f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$
donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite $y = 0$.

correction de l'exercice 2

1. <u>Asymptote en $-\infty$</u> :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^x - 1}_{\to-1}} = +\infty \qquad \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x-1}}{x} = \frac{x}{e^x - 1} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to-\infty}{\to} -1$$
$$f(x) - (-x) = f(x) + x = \frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{\overbrace{xe^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x - 1}_{\to -1}} \underset{x\to-\infty}{\to} 0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} e^x\right)$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = -x$ comme droite asymptote en $-\infty$

Asymptote en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}} = \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} \times \frac{1}{\underbrace{1 - e^{-x}}_{\to 0}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0 \quad (\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x})$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = 0$ comme droite asymptote en $+\infty$.

2. Continuité et dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\times$: Sur $\mathbb{R}^\times$, la fonction f est égale à la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. Cette dernière fonction est le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$ donc la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} = f(x)$, sur $\mathbb{R}^\times$, est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^\times$.
   Continuité en 0 : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$ (car $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$) et comme $f(0) = 1$, on en déduit que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, la fonction f est continue en 0.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - x(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x - 1)^2}$.

4. La fonction $g : x \mapsto e^x - xe^x - 1$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$g'(x) = e^x - (1e^x + xe^x) = -xe^x$$

   Le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est alors

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Justification des limites :

$$\text{En } -\infty \quad : \quad g(x) = e^x - xe^x - 1 \underset{x \to -\infty}{\to} -1 \qquad (\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0)$$

$$\text{En } +\infty \quad : \quad g(x) = -\underbrace{xe^x}_{\to +\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{x} + 1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)}_{\to 1} \underset{x \to +\infty}{\to} -\infty \qquad (\lim_{x \to +\infty} xe^x = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty)$$

5. A la question 2, il a été montré que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et en 0 (indication de la question 2), on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. La combinaison 3 et 4 et l'indication de la question 2, montre que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, les deux conditions du théorème de bijection sont réalisées, ce qui implique que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ (d'après les limites calculées à la question 1).

correction de l'exercice 3

Etude la fonction e Sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $[-1, 2]$, $]2, +\infty[$, la fonction e est égale à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction e est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}$ (ne pas oublier d'enlever les points "collant" à deux intervalles consécutifs).

Etude de la continuité en -1 : La fonction e possédant deux expressions distinctes selon que l'on se trouve à gauche ou à droite de 1, nous allons utiliser les limites gauche et droite

$$\lim_{x \to -1^-} e(x) = \lim_{x \to -1^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x \to -1^+} e(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 1) = -1 + 1 = 0$$

donc les limites gauche et droite en -1 sont égales, ce qui implique que $\lim_{x \to -1} e(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, $e(-1) = -1 + 1 = 0$ donc $\lim_{x \to -1} e(x) = e(-1)$, ce qui implique la continuité de e en -1.

Etude de la continuité en 2 :

$$\lim_{x \to 2^-} e(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} e(x) = \lim_{x \to 2^+} 3 = 3$$

donc les limites gauche et droite en 2 sont égales, ce qui implique que $\lim_{x \to 2} e(x)$ existe et vaut 3. D'autre part, $e(2) = 3$ donc $\lim_{x \to 2} e(x) = e(2)$, ce qui implique la continuité de e en 2.

En conclusion, on peut affirmer que la fonction e est continue sur $\mathbb{R}$ (ce que le graphique semblait nous indiquer).
$\boxed{\text{Etude la fonction } f}$ Sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $]0,1[$, $[1,+\infty[$, la fonction f est égale à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ (ne pas oublier d'enlever les points "collant" à deux intervalles consécutifs).
Etude de la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

donc les limites gauche et droite en 0^+ sont égales, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ce qui implique la continuité de f en 0.
Etude de la continuité en 1 :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 1\times\ln 1 = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

donc les limites gauche et droite en 2 sont distinctes, ce qui implique que la fonction f n'admet pas de limite en 1, ce qui interdit la continuité de f en 1 (pour la continuité, la limite doit exister !!!!! pour être égale à ..).
En conclusion, on peut affirmer que la fonction f est continue uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (ce que le graphique semblait nous indiquer).

$$e : x \mapsto \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < -1 \\ x+1 & \text{si} & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right. \qquad f : x \mapsto \left\{\begin{array}{ccc} x^2 & \text{si} & x \leqslant 0 \\ x\ln x & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{si} & x \geqslant 1 \end{array}\right.$$

correction de l'exercice 4

1. Représenter sur un même graphique T et T'.
2. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2}$

   (b) Recherche des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2} & = & 0 \\ -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{2}{(x+y)^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{2}{(x+y)^2} & = & \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{2}{(x+y)^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{x^2} & = & \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & = & (x+y)^2 \\ x^2 & = & y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & = & (x+y)^2 \\ x & = & \pm y \end{array}\right.$$

Etant donné que les réels x et y sont strictement positifs, on en déduit que l'égalité $x = -y$ est impossible (un nombre strictement positif ne peut être égal à un nombre strictement négatif).

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & = & (x+y)^2 \\ x & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ 2x^2 & = & (2x)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ 0 & = & 2x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui est impossible car on suppose x et y strictement supérieur à $\dfrac{1}{4}$.
Par conséquent, la fonction f n'admet aucun point critique sur T' donc elle ne peut admettre d'extrémum sur T'.

3. En utilisant les inégalités satisfaitent par x et y sur T, on obtient aisément la majoration

$$\left\{\begin{array}{c} x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ y \geqslant \dfrac{1}{4} \\ x+y \leqslant \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{x} \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{y} \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{x+y} \geqslant \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{x} \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{y} \leqslant 4 \\ \dfrac{2}{x+y} \leqslant \dfrac{8}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{x} \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{y} \leqslant 4 \\ -\dfrac{2}{x+y} \leqslant -\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y} \leqslant 4 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

D'autre part, sur le dessin de T, on constate qu'en fait x et y appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Montrons ceci algébriquement, ce qui va permettre de justifier la minoration sur $f(x, y)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4} \leqslant x \\ \frac{1}{4} \leqslant y \\ x+y \leqslant \frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}+y \leqslant x+y \leqslant \frac{3}{4} \\ x+\frac{1}{4} \leqslant x+y \leqslant \frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}+y \leqslant \frac{3}{4} \\ x+\frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \leqslant \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \\ x \leqslant \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$2 \leqslant f(x, y) \Leftrightarrow 2 \leqslant \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow 2xy(x+y) \leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant \underbrace{x^2}_{\geqslant 0}\underbrace{(1-2y)}_{\geqslant 0}+\underbrace{y^2}_{\geqslant 0}\underbrace{(1-2x)}_{\geqslant 0}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que l'inégalité $2 \leqslant f(x, y)$ est également vraie.