Exercice 1
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P^2 - P - 2I_3 = 0$. En déduire que P est inversible et expliciter cet inverse.
2. Expliciter la matrice B définie par $A = PBP^{-1}$ et vérifier que $B = 2I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer J^2 et en déduire l'expression de B^n.
4. Exprimer A^n en fonction de P et B puis donner les neuf coefficients de la matrice A^n.
5. Applications : On considère les suites x, y, z définies par récurrence à l'aide de la relation suivante

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

   On introduit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

   Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_{n+1} = AX_n$ puis que $X_n = A^n X_0$.
   En déduire l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 2
On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tous réels a, b, c, on considère également la matrice $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.

1. Calculer les matrices J^2, K^2, JK, KJ.
   En déduire l'expression de $M(a, b, c)M(x, y, z)$ sous la forme $M(?, ?, ?)$
2. Justifier que $M(a, b, c)$ est inversible lorsque $a \neq 0$ et donner son inverse sous la forme $M(?, ?, ?)$.
   Qu'en est-il si $a = 0$ (*on explicitera la matrice $M(a, b, c)$ dans ce cas*) ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels x_n, y_n, z_n tels que $[M((a, b, c)]^n = x_n I + y_n J + z_n K$
   Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \\ z_{n+1} = cx_n + by_n + az_n \end{cases}$
4. Déterminer x_n en fonction de n. On suppose désormais $a \neq 0$.
5. On pose $u_n = \dfrac{y_n}{x_n}$. Déterminer u_n, puis y_n en fonction de n.

Exercice 3
On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.
A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On considère les variables aléatoires $(W_n)_{n\geqslant 0}$, à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B, en posant :
$W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,
$W_n = 0$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0,
$W_n = 1$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A se trouve dans C_0,et B dans C_1,
$W_n = 2$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A se trouve dans C_1,et B dans C_0,
$W_n = 3$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1.

1. Calculer la probabilité $p(W_1 = i)$ pour i égal à 0, 1, 2 et 3.
2. Exprimer $p(W_{n+1} = 0)$ (resp. $p(W_{n+1} = 1)$, resp. $p(W_{n+1} = 2)$, resp. $p(W_{n+1} = 3)$) en fonction de $p(W_n = 0)$, $p(W_n = 1)$, $p(W_n = 2)$, $p(W_n = 3)$.

   Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a bien l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} p(W_{n+1}=0) \\ p(W_{n+1}=1) \\ p(W_{n+1}=2) \\ p(W_{n+1}=3) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   puis justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. On note D cette matrice, i.e. $D = P^{-1}AP$
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire les seize coefficients de la matrice A^n.
   (d) Donner la loi de la variable W_n ainsi que $E(W_n)$, $V(W_n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(W_n)$