

Exercice 1

On considère deux variables X et Y indépendantes telles que

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, & P(X = k) &= \frac{1}{3} \\ Y(\Omega) &= \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, & P(Y = k) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1. Déterminer la loi des cinq variables

$$R = X^2 + Y^2 \quad S = XY, \quad T = |X - Y|, \quad U = \frac{X}{Y}, \quad V = \max(X, Y), \quad W = \min(X, Y)$$

2. Les variables R et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Une célèbre entreprise de porcelaine E dispose de 10 conteneurs d'assiettes. Ces 10 conteneurs sont absolument identiques et contiennent les mêmes assiettes dans la même quantité.

L'entreprise E décide d'expédier, via un transporteur T , ces dix conteneurs à sa filiale F . Malheureusement, lors du transport, trois des conteneurs se heurtent et de nombreuses assiettes sont abimées dans chacun de ces trois conteneurs (au moins 5 % des assiettes par conteneur). Par contre, les 7 autres conteneurs sont intacts.

Le transporteur, qui a connaissance de ces dégâts, décide de ne pas prévenir l'entreprise E , ni sa filiale F et il dépose les conteneurs à la filiale F .

Un commerçant C arrive le lendemain à la filiale F et souhaite acheter, pour son magasin, 6 de ces conteneurs. La filiale F accepte de vendre chaque conteneur 100 000 euros mais elle refuse catégoriquement toute ristourne. Le commerçant C obtient néanmoins qu'en contrepartie d'un paiement immédiat et au comptant de ces 6 conteneurs, il sera remboursé du prix de chaque conteneur contenant plus de 5 % d'assiettes endommagées et, en outre, il obtiendra un dédommagement de 30 000 euros pour chaque conteneur endommagé.

Le commerçant choisit alors 6 conteneurs au hasard (il ne peut en aucun cas ouvrir les conteneurs, ni voir ce qu'ils contiennent).

On note X le nombre de conteneurs endommagés et Z le coût total pour le commerçant C **après vérification des conteneurs**.

1. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Exprimer Z en fonction de X . En déduire son espérance et sa variance.
3. Sachant que chaque conteneur contient 10 000 assiettes et que chaque conteneur endommagé contient entre 500 et 1000 assiettes endommagées, à combien peut-on estimer le coût unitaire de chaque assiette non endommagée ?

Rappel : le coût unitaire est égal au quotient du coût total payé par le commerçant C par le nombre d'assiettes non endommagées

Exercice 3

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires. On pioche sans remise les boules une par une. On note

- X_1 le nombre de boules nécessaires pour piocher la première boule rouge.
- X_2 le nombre de boules nécessaires pour piocher la deuxième boule rouge
- X_3 le nombre de boules nécessaires pour piocher la troisième boule rouge

Par exemple, si l'on pioche RNNRNRN alors $X_1 = 1$, $X_2 = 4$ et $X_3 = 6$

1. Donner la loi ainsi que l'espérance et la variance de X_1 , X_2 et X_3 .
2. On introduit les deux variables $Z_1 = X_2 - X_1$ et $Z_2 = X_3 - X_2$.
 - (a) Donner l'espérance des variables Z_1 et Z_2 .
 - (b) Donner la loi des variables Z_1 et Z_2 .
 - (c) Que représentent Z_1 et Z_2 ? Interprétation des résultats de la question a)