Exercice 1

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$

   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   (c) Etablir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tout entier strictement positif n, on considère l'équation

$$(E_n) : x^3 + 5x = 1 + \frac{1}{n}$$

   (a) Justifier que pour tout entier n, l'équation (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
   On note α_n cette solution.

   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.

   (c) Justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_n \geqslant \alpha$.

   (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   (e) Déterminer sa limite
   (*Indication : on écrira explicitement l'équation satisfaite par α_n et on fera tendre n vers $+\infty$*)

3. Pour tout entier naturel n, on considère l'équation

$$(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
   On note β_n cette solution.

   (b) Calculer β_0, β_1, β_2.

   (c) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < \beta_n \leqslant \dfrac{1}{5}$.

   (d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.

   (e) En utilisant l'équation satisfaite par β_n, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.

   (f) On souhaite déterminer la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$.
   Pour cela, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 5x - 1$.

      i. Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

      ii. En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(\beta_n)$.

      iii. Que vaut $f_{n+1}(\beta_{n+1})$? Déduire de cette question et de la précédente que

$$\forall n \geqslant 0, \quad f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

      iv. Quelle est la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$?

Exercice 2

Un fumeur se trouvant en plein air possède 4 allumettes et veut allumer une cigarette. Chaque allumette a la probabilité $p \in]0,1[$ pour que le vent l'éteigne avant que la cigarette soit allumée. On suppose que les essais sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité pour que le fumeur puisse allumer sa cigarette avec les 4 allumettes ?
   Soit X le nombre d'allumettes qui vont permettrent au fumeur d'allumer sa cigarette.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X

3. Vérifier que $E(X) = 4(1-p)$ et $V(X) = 4p(1-p)$.

Exercice 3

Soit n un entier tel que $n \geqslant 9$. Une urne contient n boules dont 4 sont rouges et $n - 4$ sont noires.

1. On pioche 3 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenus.
   Donner la loi de X.

2. On pioche 5 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues.
   Donner la loi de X.