Exercice 1

Une secrétaire effectue 3 appels téléphoniques vers 3 correspondants distincts. Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $\frac{1}{5}$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est $\frac{4}{5}$.

1. Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on définit l'évènement A_k :

   A_k : "la secrétaire a contacté k correspondants lors de ces 3 premiers appels "

   Calculer la probabilité des évènements A_0, A_1, A_2, et A_3.
   On donnera les résultat sous la forme de fractions irréductibles.

2. Après ces 3 recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Par exemple, si elle a obtenu 1 correspondant lors de la première série d'appels, elle rappelle les 2 correspondants qu'elle n'a pu obtenir.
   Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on définit l'évènement B_k :

   B_k : " la secrétaire a obtenu k correspondants lors des deux séries d'appels "

   Par exemple, si la secrétaire a obtenu 1 correspondant lors de la première série d'appels (donc elle recontacte lors de la seconde série d'appels les 2 correspondants non contacté la première fois) et qu'elle réussit à contacter 1 seul correspondant lors de la seconde série d'appel, alors elle a contacté 1+1=2 correspondants lors des deux séries d'appels, ce qui implique que l'évènement B_2 se réalise.

   (a) Calculer les 16 probabilités conditionelles suivantes :

   $$\begin{array}{llll} P_{A_0}(B_0) & P_{A_1}(B_0) & P_{A_2}(B_0) & P_{A_3}(B_0) \\ P_{A_0}(B_1) & P_{A_1}(B_1) & P_{A_2}(B_1) & P_{A_3}(B_1) \\ P_{A_0}(B_2) & P_{A_1}(B_2) & P_{A_2}(B_2) & P_{A_3}(B_2) \\ P_{A_0}(B_3) & P_{A_1}(B_3) & P_{A_2}(B_3) & P_{A_3}(B_3) \end{array}$$

   (b) Calculer la probabilité des évènements B_0, B_1, B_2, et B_3.
   On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

Exercice 2

Dans un jeu, il y a 10 numéros (de 1 à 10) dont 2 numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu.
Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, 2 numéros différents. Le meneur dévoile alors 2 numéros perdants parmi les 8 numéros qui n'ont pas été tirés (donc 4 numéros sont dévoilés et 6 ne le sont pas).
Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.

Stratégie A : il garde les 2 numéros qu'il a tirés.

Stratégie B : il échange les 2 numéros qu'il a tirés contre 2 nouveaux numéros tirés au hasard parmi les 6 numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.

Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, on définit l'évènement A_k par

A_k : " le joueur obtient k numéros gagnants lors du premier tirage "

et l'évènement B_k par :

B_k : " le joueur obtient k numéros gagnants lors du second tirage "

1. Calculer la probabilité des évènements A_0, A_1 et A_2.
2. Calculer la probabilité des évènements B_0, B_1 et B_2.
3. Quelle stratégie doit-on choisir si l'on souhaite obtenir les deux numéros gagnants ?

Exercice 3
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

On remarquera que les boules noires ne changent donc jamais d'urne, seule la boule blanche peut changer d'urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

et par B_n l'évènement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) La notation PB_1 signifiant: "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1" (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'événement $\{PB_1\}$.
   (b) En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (c) Calculer la probabilité des évènements A_1 et B_1
2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) Vérifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{6}$
   (b) Calculer également $P_{A_n}(B_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
   (c) En déduire $P(A_{n+1})$ puis $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
   (d) Que vaut la somme $P(A_n) + P(B_n)$? En déduire que $\forall n \geqslant 0$, $\begin{cases} P(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(A_n) + \dfrac{1}{6} \\ P(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(B_n) + \dfrac{1}{6} \end{cases}$
   (e) Déterminer, en fonction de n, les expressions de $P(A_n)$ et $P(B_n)$.