Exercice 1
On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 \in [0,1]$

1. Déterminer la monotonie de la suite u
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$
3. En déduire que la suite u est convergente et expliciter sa limite.

Exercice 2
Soit u la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$
2. Montrer que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
4. (a) Déterminer le signe du trinôme $2x^2 - 3x + 1$
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(1-u_n)$.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant (\frac{2}{3})^n$.
   (d) Retrouver ainsi que la suite u est convergente.

Problème : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est de démontrer partiellement la célèbre formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

En fait, nous allons "seulement" prouver que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}}$ existe et est strictement positive (ce qui est en soi est déjà un très bon résultat)

Partie I : Quelques encadrements remarquables

L'objectif de cette partie est de démontrer que

$$(E) : \forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \leqslant 1 - (x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant 0$$

Pour cela, on introduit deux fonctions auxiliaires définies sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = 1 - (x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12}(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$$

1. Un encadrement auxiliaire :
   (a) Montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant \dfrac{1}{x}$
   (b) En déduire un encadrement de $(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})$ sur $[1,+\infty[$.
   (c) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})$ existe et calculer cette limite.
2. Etude du signe de f :
   (a) Vérifier que l'on a
   $$\forall x \geqslant 1, \quad f'(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{2x+1}{2x(x+1)} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$
   (b) Dresser le tableau des variations de f' et en déduire le signe de f'.
   (c) Dresser le tableau des varations de f et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de f.
3. Etude du signe de g :
   (a) Vérifer que l'on a :
   $$\forall x \geqslant 1, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{1}{6x^3(x+1)^3}$$
   (b) Dresser le tableau des variations de g' et en déduire le signe de g'.
   (c) Dresser le tableau des variations de g et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de g.

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

On introduit les trois suites suivantes :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}}, \quad S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - (n+\frac{1}{2})\ln n + n, \quad T_n = S_n - \frac{1}{12n}$$

1. Vérifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \ln u_n = S_n$
2. A l'aide de l'encadrement (E) obtenue dans la première partie, montrer que les deux suites S et T sont adjacentes.
3. En déduire que la suite u converge vers un réel strictement positif.