Exercice 1
Soit x un réel positif, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^n}{n!}e^x$
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = e^x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \leqslant e^x$
4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
5. En remarquant que $\dfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
6. A l'aide des questions précédentes, déterminer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} I_n$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right)$.

   Qu'en déduit-on sur la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ et sur sa somme ?

Exercice 2
Soit x un réel appartenant à $[0,1[$, on souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,x], \quad \sum_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.
2. En intégrant sur $[0,x]$, en déduire que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}dt$
3. Justifier que $\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \dfrac{1}{(n+2)(1-x)}$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}dt$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ puis $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k}$
5. Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ et de sa somme éventuelle ?
6. Calculer la somme suivante $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.
7. Une application aux probabilités :
   On considère une collection infinie d'urnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, où l'urne U_n contient n boules dont une et une seule boule blanche.
   On dispose également d'une pièce équilibrée.
   On lance autant de fois que nécessaire la pièce jusqu'à l'obtention du premier "Pile".
   On note X le nombre de lancers nécessaires.
   Ensuite, si l'on a eu besoin de k lancers, on pioche une et une seule boule dans l'urne U_k

   (a) Donner la loi de X.

   (b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.