correction de l'exercice 1

1. Un calcul direct nous donne $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + P$ donc $P^2 - P - 2I_3 = 0$.

   Il est alors immédiat que $P^2 - P = 2I_3 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{P - I_3}{2}\right) = I_3$ donc la matrice P est inversible et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{2}(P - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = B$, ce qui nous donne

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et il est immédiat que $B = 2I_3 + J$.

3. Un calcul direct nous donne $J^2 = 0_3$.
   Calcul de B^n : Puisque $B = 2I_3 + J$, on souhaite appliquer la formule du binôme de Newton. Pour cela, il faut vérifier que J et I_3 commutent. C'est immédiat puisque $(2I_3)J = 2I_3J = 2J$ et $J(2I_3) = 2JI_3 = 2J$ donc $(2I_3)J = J(2I_3)$

$$B^n = (2I_3 + J)^n = (J + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I_3)^{n-k}$$

   Nous savons que $J^2 = 0_3$ donc pour tout $k \geqslant 2$, $J^k = 0$, ce qui implique que tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls sauf, éventuellement, les termes correspondants à $k = 0$ et 1

$$B^n = \binom{n}{0} J^0 (2I_3)^{n-0} + \binom{n}{1} J^1 (2I_3)^{n-1} = 2^n I_3 + n2^{n-1}J = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. Montrons par récurrence que $A^n = PB^nP^{-1}$.
   Initialisation $n = 0$: $A^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $A^0 = PB^0P^{-1}$.
   Hérédité : supposons que $A^n = PB^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PB^{n+1}P^{-1}$

$$A^{n+1} = A^nA = PB^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}BP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$$

   ce qui achève la récurrence.
   Un calcul direct nous donne

$$PB^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 2^n \\ 2^n & 0 & 2^n + n2^n \\ 2^n & 2^n & n2^n \end{pmatrix} \qquad A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}n2^n & 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) & -\frac{1}{2}n2^n \\ \frac{1}{2}n2^n & \frac{1}{2}n2^n & 2^n\left(1 - \frac{n}{2}\right) \end{pmatrix}$$

5. L'égalité $X_{n+1} = AX_n$ est immédiate (sinon, revoir le cours sur le lien entre systèmes linéaires et matrices).
   Montrons par récurrence que $X_n = A^nX_0$.
   Initialisation $n = 0$: $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc $X_0 = A^0X_0$.
   Hérédité : supposons que $X_n = A^nX_0$ alors $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$ ce qui achève la récurrence.

$$X_n = A^nX_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}n2^n & 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) & -\frac{1}{2}n2^n \\ \frac{1}{2}n2^n & \frac{1}{2}n2^n & 2^n\left(1 - \frac{n}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) \end{pmatrix}$$

   Par conséquent, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_n = 2^n \\ y_n = 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ z_n = 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) \end{cases}$

correction de l'exercice 2
On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tous réels a, b, c, on considère également la matrice $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$.

1. Je laisse le soin au lecteur de vérifier, par calcul direct, que $J^2 = K, \quad K^2 = KJ = JK = 0_3$.
Il est alors immédiat que

$$\begin{aligned} M(a,b,c)M(x,y,z) &= (aI + bJ + cK)(xI + yJ + zK) \\ &= axI^2 + ayIJ + azIK + bxJI + byJ^2 + bzJK + cxKI + cyKJ + czK^2 \\ &= axI + ayJ + azK + bxJ + byK + cxK = axI + (ay + bx)J + (az + by + cx)K \\ M(a,b,c)M(x,y,z) &= M(ax, ay + bx, az + by + cx) \end{aligned}$$

2. Cas où $a \neq 0$: On recherche l'inverse éventuel de $M(a,b,c)$ sous la forme $M(x,y,z)$ et en remarquant que $M(1,0,0) = I$, on a

$$M(a,b,c)M(x,y,z) = I \Leftrightarrow M(ax, ay + bx, az + by + cx) = M(1,0,0)$$

Cette égalité est vérifiée si l'on a

$$\begin{cases} ax = 1 \\ ay + bx = 0 \\ az + by + cx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ y = -\dfrac{b}{a}x = -\dfrac{b}{a^2} \\ z = -\dfrac{1}{a}(cx + by) = \dfrac{b^2 - ac}{a^3} \end{cases}$$

Par conséquent, si $a \neq$, on a $M(a,b,c)M\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a^2}, \dfrac{b^2 - ac}{a^3}\right) = I$ donc $M(a,b,c)$ est inversible et

$$[M(a,b,c)]^{-1} = M\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}, \frac{b^2 - ac}{a^3}\right)$$

Cas où $a = 0$: La matrice $M(0,b,c) = bJ + cK = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire et au moins un de ses coefficients diagonaux est nuls (tous en fait) donc elle n'est pas inversible.

3. On procède par récurrence en posant

$$(\mathcal{P}_n) : \text{il existe trois réels } x_n,\ y_n,\ z_n \text{ tels que } [M((a,b,c)]^n = x_n I + y_n J + z_n K$$

Initialisation $n = 0$: $[M(a,b,c)]^0 = I$ et l'on souhaite construire trois réels x_0, y_0, z_0 tels que $[M(a,b,c)]^0 = x_0 I + y_0 J + z_0 K$. En choisissant $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$, l'égalité est vérifiée donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie
Hérédité : .Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe trois réels x_n, y_n, z_n tels que $[M((a,b,c)]^n = x_n I + y_n J + z_n K$ et montrons qu'il existe trois réels x_n, y_n, z_n tels que $[M((a,b,c)]^{n+1} = x_{n+1} I + y_{n+1} J + z_{n+1} K$

$$[M((a,b,c)]^{n+1} = M(a,b,c)\,[M((a,b,c)]^n = M(a,b,c)M(x_n, y_n, z_n) = M(ax_n, ay_n + bx_n, az_n + by_n + cx_n)$$

Si l'on choisit x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} de la façon suivante, $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \\ z_{n+1} = cx_n + by_n + az_n \end{cases}$, on a bien

$$[M((a,b,c)]^{n+1} = M(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = x_{n+1} I + y_{n+1} J + z_{n+1} K$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
La relation $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \\ z_{n+1} = cx_n + by_n + az_n \end{cases}$ est bien entendu vérifiée.

4. La suite x est géométrique de raison a donc $x_n = a^n x_0 = a^n \times 1 = a^n$.

5. $u_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{a^{n+1}} = \dfrac{ba^n + ay_n}{a^{n+1}} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{y_n}{a^n} = \dfrac{b}{a} + u_n$ donc la suite u est arithmétique de raison $\dfrac{b}{a}$, ce qui implique que
$$u_n = n \times \frac{b}{a} + u_0 \Leftrightarrow \frac{y_n}{a^n} = n \times \frac{b}{a} + \frac{y_0}{a^0} \Leftrightarrow \frac{y_n}{a^n} = n \times \frac{b}{a} \Leftrightarrow y_n = nba^{n-1}$$

correction de l'exercice 3

1. L'évènement $(W_1 = 0)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre c donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

   L'évènement $(W_1 = 1)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre b donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

   L'évènement $(W_1 = 2)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre a donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

   L'évènement $(W_1 = 3)$ est impossible donc $p(W_1 = 0) = 0$.

2. L'état des jetons A et B à l'issue de la $(n+1)$-ième opération dépendant de l'état de ces jetons à l'intant $t = n$, on introduit naturellement le système complet d'évènements $(W_n = 0)$, $(W_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(W_n = 3)$. La formule des probabilités totales montre que
$$\begin{aligned} p(W_{n+1} &= 0) = \sum_{j=0}^{3} p(W_n = k \cap W_{n+1} = 0) = \sum_{j=0}^{3} p_{(W_n=j)}(W_{n+1} = 0)p(W_n = j) \\ &= \frac{1}{3}p(W_n = 0) + \frac{1}{3}p(W_n = 1) + \frac{1}{3}p(W_n = 2) \end{aligned}$$
   Justification des calculs de probabilités :
   $\underline{p_{(W_n=0)}(W_{n+1} = 0)}$ *: les jetons A et B se trouvent dans l'urne C_0 à l'instant n et ils restent, à l'instant $n+1$, dans la même urne, ce qui signifie que l'on pioche la lettre a donc* $p_{(W_n=0)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
   $\underline{p_{(W_n=1)}(W_{n+1} = 0)}$ *: à l'instant n, le jeton A est dans l'urne C_0 et le jeton B se trouvent dans l'urne C_1 puis, à l'instant $n+1$, les jetons A et B sont dans l'urne C_0, ce qui signifie que l'on pioche la lettre b donc* $p_{(W_n=1)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
   $\underline{p_{(W_n=2)}(W_{n+1} = 0)}$ *:à l'instant n, le jeton A est dans l'urne C_1 et le jeton B se trouvent dans l'urne C_0 puis, à l'instant $n+1$, les jetons A et B sont dans l'urne C_0, ce qui signifie que l'on pioche la lettre a donc* $p_{(W_n=2)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
   $\underline{p_{(W_n=3)}(W_{n+1} = 0)}$ *: les jetons A et B se trouvent dans l'urne C_1 à l'instant n et ils sont, à l'instant $n+1$, dans l'urne C_0 ce qui est impossible donc* $p_{(W_n=3)}(W_{n+1} = 0) = 0$.
   Par le même type de raisonnement (que je n'expliciterais pas), on obtient
$$\begin{aligned} p(W_{n+1} &= 1) = \frac{1}{3}p(W_n = 0) + \frac{1}{3}p(W_n = 1) + \frac{1}{3}p(W_n = 3) \\ p(W_{n+1} &= 2) = \frac{1}{3}p(W_n = 0) + \frac{1}{3}p(W_n = 2) + \frac{1}{3}p(W_n = 3) \\ p(W_{n+1} &= 3) = \frac{1}{3}p(W_n = 1) + \frac{1}{3}p(W_n = 2) + \frac{1}{3}p(W_n = 3) \end{aligned}$$
   L'égalité matricielle demandée est alors immédiate. Pour la dernière formule, on procède par récurrence.
   On pose $X_n = \begin{pmatrix} p(W_n = 0) \\ p(W_n = 1) \\ p(W_n = 2) \\ p(W_n = 3) \end{pmatrix}$ et en remarquant que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (puisque $W_0 = 0$), il suffit de montrer que $X_n = A^n X_0$.
   Initialisation $n = 0$: $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc $X_0 = A^0 X_0$.
   Hérédité : supposons que $X_n = A^n X_0$ alors $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$ ce qui achève la récurrence.

3. (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \textit{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \textit{pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \; L_3 \leftrightarrow L_4 \right.$$

Cette dernière matrice est triangulaire et tous ces coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible, ce qui implique l'inversibilité de P

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ \textit{Pivot} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \textit{Pivot} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \textit{Pivot} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{array} \right.$$

Je laisse le lecteur vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Par calcul, on a

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Montrons par récurrence que $D^n = P^{-1}A^nP$.
Initialisation $n = 0$: $D^0 = I_3$ et $PA^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $D^0 = PA^0P^{-1}$.
Hérédité : supposons que $D^n = PA^nP^{-1}$ et montrons que $D^{n+1} = PA^{n+1}P^{-1}$

$$D^{n+1} = D^nD = PA^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}AP^{-1} = PA^nAP^{-1} = PA^{n+1}P^{-1}$$

ce qui achève la récurrence. Il est alors immédiat que $A^n = PD^nP^{-1}$ et, par calcul, on obtient

$$PD^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 & 0 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 1 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n & -\left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \end{pmatrix}$$

(d) En explicitant l'égalité $\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ étant acquise, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p(W_n=0) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ p(W_n=1) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ p(W_n=2) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\ p(W_n=3) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(W_n) &= \sum_{k=0}^{3} kp(W_n=k) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{3}{2} \\ E(W_n^2) &= \sum_{k=0}^{3} k^2 p(W_n=k) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{2} \\ V(W_n) &= E(W_n^2) - (E(W_n))^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V(W_n) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$