correction de l'exercice 1

Voici le code à entrer dans le tableur. Pour les valeurs numériques, voir soit le fichier Tableur, soit le corrigé dédié.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite a**	**suite b**	**suite c**	**suite d**
2					
3	0		3	0	0
4	1	7	=(C3)*exp(-(C3))	=racine((D3)+A3)	=(E3)+(1/2)*(5-(E3)^2)
5	2	=(2+B4)/(1+(B4)^4)	=(C4)*exp(-(C4))	=racine((D4)+A4)	=(E4)+(1/2)*(5-(E4)^2)
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=(2+B51)/(1+(B51)^4)	=(C51)*exp(-(C51))	=racine((D51)+A51)	=(E51)+(1/2)*(5-(E51)^2)
53	50	=(2+B52)/(1+(B52)^4)			

	A	**B**	**C**	**D**
1	**n**	**suite e**	**suite f**	**suite g**
2				
3	0	1		
4	1	=1+((A3)/B3)	1	3
5	2	=1+((A4)/B4)	=C4+1/((A4)*2^(A4))	7
6	3	⋮	⋮	=(3*racine(D5)+2*racine(D4))/35
	⋮	⋮	⋮	=(3*racine(D6)+2*racine(D5))/35
52	49	=1+((A51)/B51)	=C51+1/((A51)*2^(A51))	⋮
53	50		=C52+1/((A52)*2^(A52))	=(3*racine(D52)+2*racine(D51))/35

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite h**	**suite i**	**suite j**	**suite k**
2					
3	0	1	0	3	2
4	1	2	1	=(1/2)*((D3)+(E3))	=racine((D3)*(E3))
5	2	=((E4)*(E3))/((E4)+(E3))	=3*(A3)-1+(C4)/2-(C3)/6	=(1/2)*((D4)+(E4))	=racine((D4)*(E4))
6	3	=((E5)*(E4))/((E5)+(E4))	=3*(A4)-1+(C5)/2-(C4)/6	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	49	=((E51)*(E50))/((E51)+(E50))	=3*(A50)-1+(C51)/2-(C50)/6	=(1/2)*((D51)+(E51))	=racine((D51)*(E51))

	A	**B**	**C**
1	**n**	**suite l**	**suite m**
2			
3	0	2	3
4	1	=((B3)+(C3))/2	=2*(B3)*(C3)/((B3)+(C3))
5	2	=((B4)+(C4))/2	=2*(B4)*(C4)/((B4)+(C4))
	⋮	⋮	⋮
52	49	=((B51)+(C51))/2	=2*(B51)*(C51)/((B51)+(C51))

La suite a ne semble pas converger puisqu'elle semble osciller entre deux valeurs (*on démontre que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont convergentes dont les limites ont respectivement pour valeur approchée à* 10^{-9} *près 0,178 285 573 et 2,176 086 999*)

La suite b semble décroitre mais on ne peut conclure en l'état sur la convergence (*on démontre qu'elle tend vers* 0 *comme* $\frac{1}{n}$, *ce qui explique sa convergence très lente*)

La suite c semble croitre mais on ne peut conclure en l'état sur la convergence (*on démontre qu'elle tend vers* $+\infty$ *comme* $\sqrt{n}$, *ce qui explique la lenteur de la divergence*)

La suite d semble ne pas converger (*on démontre que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont convergentes et leurs limites respectives sont* 1 *et* 3)

La suite e semble croissante mais on ne peut conclure en l'état sur la convergence (*on démontre qu'elle tend vers* $+\infty$ *comme* $\sqrt{n}$, *ce qui explique la lenteur de la divergence*)

La suite f semble converger (*on démontre qu'elle converge et que la valeur approchée de sa limite à* 10^{-9} *près est 1,693 147 181*)

Pour la suite g, on ne peut conclure en l'état (*on démontre qu'elle converge vers* 0)
La suite h semble converger vers 0 (*on démontre que c'est effectivement le cas*)
La suite i semble diverger vers $+\infty$ (*on démontre que c'est effectivement le cas*)
Les suites j et k semblent converger très rapidement vers une limite commune dont la valeur approchée à 10^{-9} près est 2,474 680 436 (*on démontre que c'est effectivement le cas, la limite porte le nom de moyenne arithmético-géométrique de 3 et 2, il s'agit en fait de deux suites adjacentes*)
Les suites l et m semblent converger très rapidement vers une limite commune dont la valeur approchée à 10^{-9} près est 2,449 489 743 (*on démontre que c'est effectivement le cas et que la limite est égale à* $\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$, *voir pour cela l'exercice 10 de la feuille d'exercice 6 de l'année 2004-2005*)

correction de l'exercice 2

1. (a) On utilise le pivot de Gauss

$$(S_1)\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}\boxed{3x+z-t=2}\\12y+4z-t=17\\-3y-10z+t=-32\\y-2t=14\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } x\\L_2\leftarrow 3L_2+L_1\\L_3\leftarrow 3L_3-L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x+z-t=2\\\boxed{12y+4z-t=17}\\-36z+3t=-111\\-4z-23t=151\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } y\\L_3\leftarrow 4L_3+L_2\\L_4\leftarrow 12L_4-L_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x+z-t=2\\12y+4z-t=17\\\boxed{-36z+3t=-111}\\-210t=1470\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } z\\L_4\leftarrow 9L_4-L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=-\dfrac{1470}{210}=-7\\z=\dfrac{-111-3t}{-36}=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{17-4z+t}{12}=0\\x=\dfrac{2-z+t}{3}=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

donc $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\left(-\dfrac{5}{2},0,\dfrac{5}{2},-7\right)$ est l'unique solution de (S)

(b) Dans le système (S_1), il suffit d'exprimer x en fonction de z et t dans la première équation, y en fonction de x et z dans la seconde équation, z en fonction de x et y dans la troisième et t en fonction de y dans la dernière
Voici le code à entrer dans le tableur. Pour les valeurs numériques, voir soit le fichier Tableur, soit le corrigé dédié.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite x**	**suite y**	**suite z**	**suite t**
2					
3	0	0	0	0	0
4	1	=(2-D3+E3)/3	=(5+B3-D3)/4	=(10+B3-C3)/3	=(-14+C3)/2
5	2	=(2-D4+E4)/3	=(5+B4-D4)/4	=(10+B4-C4)/3	=(-14+C4)/2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
42	39	=(2-D41+E41)/3	=(5+B41-D41)/4	=(10+B41-C41)/3	=(-14+C41)/2

On constate que les suites x,y,z et t semblent converger respectivement vers -2.5, 0, 2.5, -7 et pour n assez grand, à partir de $n=15$, (x_n,y_n,z_n,t_n) est une valeur approchée à 10^{-9} près de la solution $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$

2. (a)

$$(S_2)\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}\boxed{x+z-t=2}\\2y+2z-t=7\\-y-2z+t=-12\\y-2t=14\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } x\\L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+z-t=2\\\boxed{2y+2z-t=7}\\-2z+t=-17\\-2z-3t=21\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } y\\L_3\leftarrow 2L_3+L_2\\L_4\leftarrow 2L_4-L_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+z-t=2\\2y+2z-t=7\\\boxed{-2z+t=-17}\\-4t=38\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\textit{Pivot pour } z\\L_4\leftarrow L_4-L_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=-\dfrac{38}{4}=-\dfrac{19}{2}\\z=\dfrac{-17-t}{-2}=\dfrac{15}{4}\\y=\dfrac{7-2z+t}{2}=-5\\x=2-z+t=-\dfrac{45}{4}\end{array}\right.$$

donc $(A,B,C,D) = \left(-\dfrac{45}{4}, -5, \dfrac{15}{4}, -\dfrac{19}{2}\right)$ est l'unique solution de (S_2).

(b) Dans le système (S_1), il suffit d'exprimer x en fonction de z et t dans la première équation, y en fonction de x et z dans la seconde équation, z en fonction de x et y dans la troisième et t en fonction de y dans la dernière

(c) Voici le code à entrer dans le tableur. Pour les valeurs numériques, voir soit le fichier Tableur, soit le corrigé dédié.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**n**	**suite a**	**suite b**	**suite c**	**suite d**
2					
3	0	0	0	0	0
4	1	=2-D3+E3	=(5+B3-D3)/2	=10+B3-C3	=(-14+C3)/2
5	2	=2-D4+E4	=(5+B4-D4)/2	=10+B4-C4	=(-14+C4)/2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
103	100	=2-D102+E102	=(5+B102-D102)/2	=10+B102-C102	=(-14+C102)/2

Les quatres suites x, y, z et z semblent avoir un comportement erratique et ne semblent en aucun cas converger respectivement vers A, B, C et D. On démontre que ce comportement erratique ne s'arrête jamais et que l'on ne peut avoir ainsi de valeurs approchées de A, B, C et D (du moins par cette méthode).

3. On constate que ce système est à diagonale strictement dominante car

$$\left.\begin{array}{r} |1309| = 1309 \\ |167| + |-3| + |325| + |2| + |-500| = 167 + 3 + 325 + 2 + 500 = 997 \end{array}\right\} \Rightarrow |1309| > |167| + |-3| + |325| + |2| + |-500|$$

etc.
On exprime alors x en fonction de y, z, t, u, v dans la première équation, y en fonction de x, z, t, u, v dans la seconde, z en fonction de y, t, u, v dans la troisième, etc, ce qui nous donne

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2001}{1309} - \dfrac{167}{1309}y + \dfrac{3}{1309}z - \dfrac{325}{1309}t - \dfrac{2}{1309}u + \dfrac{500}{1309}v \\ y = -\dfrac{1}{7000} + \dfrac{101}{7000}x + \dfrac{143}{1000}z - \dfrac{1}{140}t + \dfrac{219}{1750}u + \dfrac{9}{70}v \\ z = \dfrac{267}{367} - \dfrac{23}{367}y - \dfrac{1}{367}t + \dfrac{2}{367}u - \dfrac{3}{367}v \\ t = \dfrac{12\,241}{4000} - \dfrac{1}{4000}x - \dfrac{1}{4000}y + \dfrac{3}{40}z \\ u = -\dfrac{876}{67} + \dfrac{12}{67}x - \dfrac{221}{67}y + \dfrac{301}{67}z + \dfrac{43}{67}t + \dfrac{900}{67}v \\ v = \dfrac{1579}{1000} + \dfrac{3}{50}x - \dfrac{7}{100}y - \dfrac{17}{500}z - \dfrac{1}{10}t - \dfrac{1}{500}u \end{cases}$$

On introduit alors les 6 suites $(x_n), (y_n), (z_n), (t_n), (u_n), (v_n)$ définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{2001}{1309} - \dfrac{167}{1309}y_n + \dfrac{3}{1309}z_n - \dfrac{325}{1309}t_n - \dfrac{2}{1309}u_n + \dfrac{500}{1309}v_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{7000} + \dfrac{101}{7000}x_n + \dfrac{143}{1000}z_n - \dfrac{1}{140}t_n + \dfrac{219}{1750}u_n + \dfrac{9}{70}v_n \\ z_{n+1} = \dfrac{267}{367} - \dfrac{23}{367}y_n - \dfrac{1}{367}t_n + \dfrac{2}{367}u_n - \dfrac{3}{367}v_n \\ t_{n+1} = \dfrac{12\,241}{4000} - \dfrac{1}{4000}x_n - \dfrac{1}{4000}y_n + \dfrac{3}{40}z_n \\ u_{n+1} = -\dfrac{876}{67} + \dfrac{12}{67}x_n - \dfrac{221}{67}y_n + \dfrac{301}{67}z_n + \dfrac{43}{67}t_n + \dfrac{900}{67}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1579}{1000} + \dfrac{3}{50}x_n - \dfrac{7}{100}y_n - \dfrac{17}{500}z_n - \dfrac{1}{10}t_n - \dfrac{1}{500}u_n \end{cases}$$

Les formules pour le tableur étant trop longues pour être placer dans ce document, je laisse le soin au lecteur de se référer au fichier Tableur correspondant.

On constate qu'à partir du rang $n = 64$, les neuf décimales des six suites ne varient plus, ce qui nous incite à pensez que les valeurs approchées de x, y, z, t, u, v sont données, à 10^{-9} près, par

$$\begin{aligned} x &\simeq x_{64} = -1,981\,705\,198 \quad y \simeq y_{64} = 0,667\,264\,451 \quad z \simeq z_{64} = 0,689\,454\,411 \\ t &\simeq t_{64} = 3,112\,287\,691 \quad u \simeq u_{64} = 3,851\,094\,535 \quad v \simeq v_{64} = 1,071\,016\,768 \end{aligned}$$

On n'oubliera pas qu'il s'agit seulement d'une intuition et non d'une preuve. Il faut prouver mathématiquement que les suites $(x_n), (y_n)_n, (z_n)_n, (t_n), (u_n), (v_n)_n$ convergent bien respectivement vers x, y, z, t, u, v et que l'on doit avoir des estimations sur la distance entre x_n et x, y_n et y, etc du type $|x_n - x| \leqslant k^n M$ où $k < 1$ et M étant une constante. Une telle estimation (c'est une information quantitative) permet de connaitre le rang à partir duquel la valeur numérique x_n est proche de x à ε près, c'est toute l'importance de l'inégalité des accroissements finis (information quantitative) par rapport aux théorèmes de monotonie (information qualitative). Nous verrons dans un prochain devoir à la maison comment on obtenir mathématiquement de telles estimations (sur la base du calcul matriciel) et en déduire, à priori, les valeurs numériques des rangs souhaités.

correction de l'exercice 3

1. **Existence et unicité de la solution de l'équation** :
   On introduit la fonction $f(x) = \ln x - (4 - x) = \ln x + x - 4$. Il est clair que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme somme de fonctions strictement croissante ou bien la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction étant évidemment C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $f(\mathbb{R}_+^\times) =]-\infty, +\infty[$ (puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$). Comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 4 - x$ admet une et une seule solution (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $\mathbb{R}_+^\times$)
   Justification de $2 \leqslant \alpha \leqslant 4$:
   On compare les images par f :
   $$f(2) = \ln 2 - 2 \simeq -1.31 \pm 10^{-2} < 0, \quad f(\alpha) = 0, \quad f(3) = \ln 4 > 0$$
   donc $f(2) < f(\alpha) < f(4)$ et comme f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, on a $2 < \alpha < 4$
   α est solution de $x = 4 - \ln x$: Puisque α est solution de $\ln x = 4 - x$, on a
   $$\ln \alpha = 4 - \alpha \Leftrightarrow \ln \alpha + \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4 - \ln \alpha$$

2. Fonction associée à la suite u et intervalle stable :
   La fonction associée à u est $g(x) = 4 - \ln x$ (car $u_{n+1} = g(u_n)$). Elle est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ (somme de fonctions décroissantes ou par dérivée) et son tableau de variations sur $[2, 4]$ est donné par

x	2		4
$g(x)$	$g(2)$	$\searrow$	$g(4)$

   donc $g([2, 3]) = [g(3), g(2)]$ et comme $g(2) = 4 - \ln 2 \simeq 3.31 \pm 10^{-2} \in [2, 4]$ et $g(3) = 4 - \ln 4 \simeq 2.613 \pm 10^{-2}$, on en déduit que $g([2, 4]) \subset [2, 4]$, ce qui signifie que l'intervalle $[2, 4]$ est stable par g.
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [2, 4]$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [2, 4]$
   Initialisation : $u_0 = 2 \in [2, 4]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [2, 4]$ donc $f(u_n) \in [2, 4]$ (par stabilité de $[2, 4]$ par f) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [2, 4]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
   Inégalité des accroissements finis :
   La dérivée de la fonction g est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g'(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc
   $$\forall x \in [2, 4], \quad -\frac{1}{2} \leqslant g'(x) \leqslant -\frac{1}{4} \Rightarrow \forall x \in [2, 4], \quad |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$
   (puisque la distance de $g'(x)$ à 0 est moindre que la distance de $-\dfrac{1}{2}$ à 0 qui vaut $\dfrac{1}{2}$.
   La fonction g étant C^1 sur $[2, 4]$ combinée à l'inégalité précédent permet d'appliquer l'inégalité des accroissements, ce qui nous permet d'écrire
   $$\forall x, y \in [2, 4], \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2} |x - y|$$
   En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[2, 4]$) et $y = \alpha$ (qui appartient aussi à $[2, 4]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ".

Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |2 - \alpha| \leqslant 1$ (puisque $\alpha \in [2,3]$, la distance entre 2 et α ne peut excéder la distance entre 2 et 3 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\dfrac{1}{2^0} = 1$, on en déduit que $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Valeur approchée de α :

Il suffit de demander que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-6}$ (dans ce cas, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-6}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -6\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{6\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Puisque $-\dfrac{6\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 19.93 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 20.

Calcul de u_{20} par un tableur : On crée un tableau de la forme

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	2
4	n=1	=4-ln(B3)
5	n=2	=4-ln(B4)
	⋮	⋮
23	n=20	=4-ln(B22)

Calcul de u_{20} avec Turbo-Pascal :

```
Program alpha
uses crt;
var u :  real; n, k :  integer;
begin
u := 2;
for k=0 to 19 do u := 4-ln(u);
writeln('u(20) vaut ', u);
repeat until keypressed;
end.
```

Avec l'une ou l'autre méthode, on obtient $u_{20} = 2,926\,271\,062$ donc

$$\boxed{\alpha \simeq 2,926\,271 \pm 10^{-6}}$$