correction de l'exercice 1

1. **Loi de** $R = X^2 + Y^2$: Pour déterminer l'univers de R, on utilise le tableau suivant

$R = X^2 + Y^2$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	2	5	10
$Y = 2$	5	8	13
$Y = 3$	10	13	18

donc $R(\Omega) = \{2, 5, 8, 10, 13, 18\}$

En utilisant que les variables X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(R = 2) = P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{9}$$
$$P(R = 5) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{2}{9}$$
$$P(R = 8) = P(X = 2 \cap Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{9}$$
$$P(R = 10) = P(X = 1 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 1) = \frac{2}{9}$$
$$P(R = 13) = P(X = 2 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 2) = \frac{2}{9}$$
$$P(R = 18) = P(X = 3 \cap Y = 3) = P(X = 3)P(Y = 3) = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R(\Omega) = \{2; 5, 8, 10, 13, 18\} \\ P(R = 2) = \frac{1}{9} \quad P(R = 5) = \frac{2}{9}, \quad P(R = 8) = \frac{1}{9}, \quad P(R = 10) = \frac{2}{9}, \quad P(R = 13) = \frac{2}{9}, \quad P(R = 18) = \frac{2}{9} \end{array}}$$

On procède de la même façon pour les cinq autres variables (je ne détaillerais donc pas les calculs)

Loi de $S = XY$:

$S = XY$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	1	2	3
$Y = 2$	2	4	6
$Y = 3$	3	6	9

donc $S(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

$$P(S = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{1}{9}$$
$$P(S = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = \frac{2}{9}$$
$$P(S = 3) = P(X = 1 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 1) = \frac{2}{9}$$
$$P(S = 4) = P(X = 2 \cap Y = 2) = \frac{1}{9}$$
$$P(S = 6) = P(X = 2 \cap Y = 3) + P(X = 3 \cap Y = 2) = \frac{2}{9}$$
$$P(S = 9) = P(X = 3 \cap Y = 3) = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\} \\ P(S = 1) = \frac{1}{9} \quad P(S = 2) = \frac{2}{9}, \quad P(S = 3) = \frac{2}{9}, \quad P(S = 4) = \frac{1}{9}, \quad P(S = 6) = \frac{2}{9}, \quad P(S = 9) = \frac{1}{9} \end{array}}$$

Loi de $T = |X - Y|$:

$T = \lvert X - Y\rvert$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	0	1	2
$Y = 2$	1	0	1
$Y = 3$	2	1	0

donc $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$P(T=0)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=2)+P(X=3\cap Y=3)=\frac{3}{9}$$
$$P(T=1)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=3)+P(X=3\cap Y=2)=\frac{4}{9}$$
$$P(T=2)=P(X=1\cap Y=3)+P(X=3\cap Y=1)=\frac{2}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T(\Omega)=\{0,1,2\} \\ P(T=0)=\frac{3}{9} \quad P(T=1)=\frac{4}{9}, \quad P(T=2)=\frac{2}{9}\end{array}}$$

Loi de $U=\dfrac{X}{Y}$:

$U=X/Y$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$	1	2	3
$Y=2$	1/2	1	3/2
$Y=3$	1/3	2/3	1

donc $U(\Omega)=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,3\right\}$

$$P(U=\frac{1}{3})=P(X=1\cap Y=3)=\frac{1}{9}$$
$$P(U=\frac{1}{2})=P(X=1\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$
$$P(U=\frac{2}{3})=P(X=2\cap Y=3)=\frac{1}{9}$$
$$P(U=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=2)+P(X=3\cap Y=3)=\frac{3}{9}$$
$$P(U=\frac{3}{2})=P(X=3\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$
$$P(U=2)=P(X=2\cap Y=1)=\frac{1}{9}$$
$$P(U=3)=P(X=3\cap Y=1)=\frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U(\Omega)=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,3\right\} \\ P(U=\frac{1}{3})=\frac{1}{9},\ P(U=\frac{1}{2})=\frac{1}{9},\ P(U=\frac{2}{3})=\frac{1}{9},\ P(U=1)=\frac{3}{9},\ P(U=\frac{3}{2})=\frac{1}{9},\ P(U=2)=\frac{1}{9},\ P(U=3)=\frac{1}{9}\end{array}}$$

Loi de $V=\max(X,Y)$:

$V=\max(X,Y)$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$	1	2	3
$Y=2$	2	2	3
$Y=3$	3	3	3

donc $V(\Omega)=\{1,2,3\}$

$$P(V=1)=P(X=1\cap Y=1)=\frac{1}{9}$$
$$P(V=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=2)=\frac{3}{9}$$
$$P(V=3)=P(X=1\cap Y=3)+P(X=2\cap Y=3)+P(X=3\cap Y=1)+P(X=3\cap Y=2)+P(X=3\cap Y=2)=\frac{5}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V(\Omega)=\{1,2,3\} \\ P(V=1)=\frac{1}{9} \quad P(V=2)=\frac{3}{9}, \quad P(V=3)=\frac{5}{9}\end{array}}$$

Loi de $W = \min(X,Y)$:

$W=\min(X,Y)$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$	1	1	1
$Y=2$	1	2	2
$Y=3$	1	2	3

donc $V(\Omega)=\{1,2,3\}$

$P(W=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=1\cap Y=2)+P(X=1\cap Y=3)+P(X=2\cap Y=1)+P(X=3\cap Y=1)=\dfrac{5}{9}$

$P(W=2)=P(X=2\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=3)+P(X=3\cap Y=2)=\dfrac{3}{9}$

$P(W=3)=P(X=3\cap Y=3)=\dfrac{1}{9}$

$$\boxed{\begin{array}{l} W(\Omega)=\{1,2,3\} \\ P(W=1)=\dfrac{5}{9} \quad P(W=2)=\dfrac{3}{9}, \quad P(W=3)=\dfrac{1}{9}\end{array}}$$

2. Les variables R et T ne sont pas indépendantes puisque, d'une part, on a :

$$P(R=2\cap T=1)=P(\emptyset)=0$$

(en effet $R=2$ signifie que $X=1$ et $Y=1$ donc $T=|X-Y|=0\neq 1$) et d'autre part, on a :

$$P(R=2)P(T=0)=\frac{1}{9}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{27}$$

donc $P(R=2\cap T=0)\neq P(R=2)P(T=0)$

correction de l'exercice 2

1. **Loi de** X : On a : $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$ (on peut avoir entre 0 et 3 conteneurs endommagés) et

$$\forall k\in[\![0,3]\!], \qquad P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{7}{6-k}}{\binom{10}{6}}$$

Justification du calcul : l'évènement $X=k$ signifie que le commerçant a choisi k conteneurs parmi les 3 conteneurs endommagés ($\binom{3}{k}$ choix) et il a donc choisi les $6-k$ autres conteneurs parmi les 7 conteneurs non endommagés ($\binom{7}{6-k}$ choix). Pour les cas possibles, il choisit 6 conteneurs parmi les 10 possibles ($\binom{10}{6}$ choix)

Espérance de X : par calcul direct, on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{6-1}}{\binom{10}{6}}+2\times\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{6-2}}{\binom{10}{6}}+3\times\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{6-3}}{\binom{10}{6}}=\frac{9}{5}\end{aligned}$$

Calcul de $E(X^2)$: toujours par calcul direct, on a :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)+2^2\times P(X=2)+3^2\times P(X=3) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{6-1}}{\binom{10}{6}}+4\times\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{6-2}}{\binom{10}{6}}+9\times\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{6-3}}{\binom{10}{6}}=\frac{19}{5}\end{aligned}$$

Variance de X : On en déduit immédiatement que :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{19}{5}-(\frac{9}{5})^2=\frac{14}{25}$$

Conclusion :

$$\boxed{X(\Omega)=[\![0,3]\!] \text{ et } \forall k\in[\![0,3]\!], \qquad P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{7}{6-k}}{\binom{10}{6}}, \qquad E(X)=\frac{9}{5} \qquad V(X)=\frac{14}{25}}$$

2. Le commerçant paie 600 000 euros mais il récupère $100\,000+30\,000$ euros pour les X conteneurs endommagés donc

$$\boxed{Z = 600\,000 - 130\ 000\ X}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(600\,000 - 130\,000X) = 600\,000 - 130\,000E(X) = 600\,000 - 130\,000 \times \frac{9}{5} = 366\,000 \\
V(Z) &= V(600\,000 - 130\,000X) = (-130\,000)^2 V(X) = (-130\,000)^2 \times \frac{14}{25} = 9464\,000\,000 \\
\sigma(Z) &= \sqrt{V(Z)} = \sqrt{9464\,000\,000} \simeq 97\,283
\end{aligned}$$

3. Le commerçant paie en moyenne 546 000 euros pour avoir $6 \times 10\,000 = 60\,000$ assiettes.
Puisqu'il il y a, en moyenne $\frac{9}{5}$ conteneurs endommagés, le commerçant a entre $\frac{9}{5} \times 500 = 900$ et $\frac{9}{5} \times 1\,000 = 1\,800$ assiettes endommagées donc il a entre $60\,000 - 900 = 59\,100$ et $60\,000 - 1\,800 = 58\,200$ assiettes en bon état.

En moyenne, le coût unitaire d'une assiette non endommagée est compris entre $\dfrac{366\,000}{59\,100} \simeq 6.19$ euros et $\dfrac{366\,000}{58\,200} \simeq 6.29$ euros

correction de l'exercice 3

1. **Etude de** X_1 : On peut avoir la première boule rouge au premier (R), second (NR), troisième (NNR), quatrième (NNNR) ou au cinquième (NNNNR) tirage mais pas aux tirages ultérieurs (puisqu'il n'y a pas remise) donc on a $X_1(\Omega) = [\![1,5]\!]$
Pour calculer les différentes probabilités correspondantes, on utilise les événements éléments R_j et N_k, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= P(R_1) = \frac{3}{7} \\
P(X_1 = 2) &= P(N_1 \cap R_2) = P(N_1)P_{N_1}(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \\
P(X_1 = 3) &= P(N_1 \cap N_2 \cap R_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(R_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35} \\
P(X_1 = 4) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap R_4) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)P_{N_1\cap N_2\cap N_3}(R_4) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{35} \\
P(X_1 = 5) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap R_4) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)P_{N_1\cap N_2\cap N_3}(N_4)P_{N_1\cap N_2\cap N_3\cap N_4}(R_5) \\
&= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{35}
\end{aligned}$$

Justification du calcul de $P(X_1 = 2)$ (les autres étant semblables) : Il y a 3 boules rouges et 4 boules noires dans l'urne (donc l'urne contient 7 boules) en tout donc $P(N_1) = \frac{4}{7}$. Ensuite, $P_{N_1}(N_2)$ signifie que l'on a pioché 1 boule noire dans l'urne, donc l'urne contient maintenant 6 boules dont 3 boules noires et 3 boules rouges (puisqu'il n'y a pas remise), ce qui implique que la probabilité d'obtenir une noire au second tirage est $\frac{3}{6}$.

Remarque : on vérifie aisément que $\sum_{k=1}^{5} P(X_1 = k) = 1$

Un calcul direct nous fournit les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{5} kP(X_1 = k) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{6}{35} + 4 \times \frac{3}{35} + 5 \times \frac{1}{35} = 2 \\
E[(X_1)^2] &= \sum_{k=1}^{5} k^2 P(X_1 = k) = 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{2}{7} + 3^2 \times \frac{6}{35} + 4^2 \times \frac{3}{35} + 5^2 \times \frac{1}{35} = \frac{26}{5} \\
V(X_1) &= E[(X_1)^2] - [E(X_1)]^2 = \frac{26}{5} - 2^2 = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$X_1(\Omega) = [\![1,5]\!]$

$P(X_1 = 1) = \frac{3}{7}$ $P(X_1 = 2) = \frac{2}{7}$ $P(X_1 = 3) = \frac{6}{35}$ $P(X_1 = 4) = \frac{3}{35}$ $P(X_1 = 5) = \frac{1}{35}$

$E(X_1) = 2$ $V(X_1) = \frac{6}{5}$

Etude de X_2 : la seconde boule rouge peut apparaitre au second (RR), troisième (NRR), quatrième (NNRR), cinquième (NNNRR) ou sixième (NNNNRR) tirage mais pas aux tirages ultérieurs (puisqu'il n'y a pas remise), ni au premier tirage (pour avoir une deuxième rouge, il en faut une première !). *Les événements donnés pour les différents tirages sont des exemples, mais il en existe d'autres.* On en déduit que $X_2(\Omega) = [\![2, 6]\!]$
Les calculs de probabiltés étant similaires à ceux menés pour X_1, nous ne détaillerons pas les calculs et, afin de ne pas alourdir inutilement les calculs, on notera désormais NR au lieu de $N_1 \cap R_2$, etc.

$$\begin{aligned}
P\left(X_2 = 2\right) &= P(RR) = \frac{1}{7} \\
P\left(X_2 = 3\right) &= P(NRR) + P(RNR) = 2 \times \frac{4}{35} = \frac{8}{35} \\
P\left(X_2 = 4\right) &= P(NNRR) + P(NRNR) + P(RNNR) = 3 \times \frac{3}{35} = \frac{9}{35} \\
P\left(X_2 = 5\right) &= P(NNNRR) + P(NNRNR) + P(NRNNR) + P(RNNNR) = 4 \times \frac{2}{35} = \frac{8}{35} \\
P\left(X_2 = 6\right) &= P(NNNNRR) + P(NNNRNR) + P(NNRNNR) + P(NRNNNR) + P(RNNNNR) = 5 \times \frac{1}{35} = \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Remarque : on vérifie aisément que $\sum\limits_{k=2}^{6} P(X_2 = k) = 1$
Un calcul direct nous fournit les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{k=2}^{6} kP(X_2 = k) = 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{8}{35} + 4 \times \frac{9}{35} + 5 \times \frac{8}{35} + 6 \times \frac{1}{7} = 4 \\
E[(X_2)^2] &= \sum_{k=1}^{5} k^2 P(X_2 = k) = 2^2 \times \frac{1}{7} + 3^2 \times \frac{8}{35} + 4^2 \times \frac{9}{35} + 5^2 \times \frac{8}{35} + 6^2 \times \frac{1}{7} = \frac{88}{5} \\
V(X_2) &= E[(X_2)^2] - [E(X_2)]^2 = \frac{88}{5} - 4^2 = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
X_2(\Omega) = [\![2, 6]\!] \\
P(X_2 = 2) = \frac{1}{7} \quad P(X_2 = 3) = \frac{8}{35} \quad P(X_2 = 4) = \frac{9}{35} \quad P(X_2 = 5) = \frac{8}{35} \quad P(X_2 = 6) = \frac{1}{7} \\
E(X_2) = 4 \qquad V(X_2) = \frac{8}{5}
\end{array}}$$

Etude de X_3 : la troisième boule rouge peut apparaitre au troisième (RRR), quatrième (NRRR), cinquième (NNRRR), sixième (NNNRRR) ou septième (NNNNRRR) tirage. *Les événements donnés pour les différents tirages sont des exemples, mais il en existe d'autres.* On en déduit que $X_3(\Omega) = [\![3, 7]\!]$
Les calculs de probabiltés étant similaires à ceux menés pour X_1, nous ne détaillerons pas les calculs et, afin de ne pas alourdir inutilement les calculs, on notera désormais NR au lieu de $N_1 \cap R_2$, etc.

$$\begin{aligned}
P\left(X_3 = 3\right) &= P(RRR) = \frac{1}{35} \\
P\left(X_3 = 4\right) &= P(NRRR) + P(RNRR) + P(RRNR) = 3 \times \frac{1}{35} = \frac{3}{35} \\
P\left(X_3 = 5\right) &= P(NNRRR) + P(NRNRR) + P(NRRNR) + P(RNNRR) + P(RNRNR) + P(RRNNR) \\
&= 6 \times \frac{1}{35} = \frac{6}{35} \\
P\left(X_3 = 6\right) &= P(NNNRRR) + P(NNRNRR) + P(NRNNRR) + P(RNNNRR) + P(NNRRNR) + P(NRNRNR) \\
&\quad + P(RNNRNR) + P(NRRNNR) + P(RNRNNR) + P(RRNNNR) \\
&= 10 \times \frac{1}{35} = \frac{10}{35} \\
P\left(X_3 = 7\right) &= 15 \times \frac{1}{35} = \frac{15}{35}
\end{aligned}$$

Pour le dernier, j'ai la flemme car il y a 15 événements, chacun de probabilité $\frac{1}{35}$. En effet, on doit choisir 2 places parmi les 6 premières pour placer les rouges donc $\binom{6}{2} = 15$ possibilités)
Remarque : on vérifie aisément que $\sum\limits_{k=3}^{7} P(X_3 = k) = 1$

Un calcul direct nous fournit les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1

$$\begin{aligned}
E(X_3) &= \sum_{k=2}^{6} kP(X_2=k) = 3\times\frac{1}{35}+4\times\frac{3}{35}+5\times\frac{6}{35}+6\times\frac{10}{35}+7\times\frac{15}{35}=6\\
E[(X_2)^2] &= \sum_{k=1}^{5} k^2P(X_2=k) = 3^2\times\frac{1}{35}+4^2\times\frac{3}{35}+5^2\times\frac{6}{35}+6^2\times\frac{10}{35}+7^2\times\frac{15}{35}=\frac{186}{5}\\
V(X_2) &= E[(X_2)^2]-[E(X_2)]^2=\frac{186}{5}-6^2=\frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
X_3(\Omega)=[\![3,7]\!]\\
P(X_3=3)=\frac{1}{35}\quad P(X_3=4)=\frac{3}{35}\quad P(X_3=5)=\frac{6}{35}\quad P(X_3=6)=\frac{10}{35}\quad P(X_3=7)=\frac{15}{35}\\
E(X_3)=6\qquad V(X_3)=\frac{6}{5}
\end{array}}$$

2. (a) $E(Z_1)=E(X_2-X_1)=E(X_2)-E(X_1)=4-2=2$
$E(Z_2)=E(X_3-X_2)=E(X_3)-E(X_2)=6-4=2$

(b) **Loi de** Z_1 : Pour déterminer $Z_1(\Omega)$, on utilise classiquement un tableau

$Z_1=X_2-X_1$	$X_1=1$	$X_1=2$	$X_1=3$	$X_1=4$	$X_1=5$
$X_2=2$	1	0	-1	-2	-3
$X_2=3$	2	1	0	-1	-2
$X_2=4$	3	2	1	0	-1
$X_2=5$	4	3	2	1	0
$X_2=6$	5	4	3	2	1

A priori, on peut dire que $Z_1(\Omega)=[\![-3,5]\!]$. Néanmoins, puisque la seconde boule rouge ne peut être obtenu avant la première, on ne peut avoir $X_2\leqslant X_1$ donc toutes les valeurs négatives, au sens large, de Z_1 sont impossibles donc $Z_1(\Omega)=[\![1,5]\!]$ et il est évident que toutes ses valeurs sont possibles.

Calculons maintenant les probabilités correspondantes : On remarquera, pour commencer, que l'événement $(X_1=i)\cap(X_2=j)$, lorsque $i<j$, signifie que l'on obtient la première boule rouge au tirage numéro i et la seconde boule rouge est obtenue au numéro j et donc tous les autres tirages précédents le numéro j et différent du numéro i fournissent des boules noires.
Le calcul de ses événements ayant été effectué lors de la recherche des loi de X_1, X_2 et X_3, on a :

$$\begin{aligned}
P(Z_1=1) &= P(X_1=1\cap X_2=2)+P(X_1=2\cap X_2=3)+P(X_1=3\cap X_2=4)+P(X_1=4\cap X_2=5)\\
&\quad +P(X_1=5\cap X_2=6)\\
&= P(RR)+P(NRR)+P(NNRR)+P(NNNRR)+P(NNNNRR)=\frac{1}{7}+\frac{4}{35}+\frac{3}{35}+\frac{2}{35}+\frac{1}{35}=\frac{15}{35}\\
P(Z_1=2) &= P(X_1=1\cap X_2=3)+P(X_1=2\cap X_2=4)+P(X_1=3\cap X_2=5)\\
&\quad +P(X_1=4\cap X_2=6)\\
&= P(RNR)+P(NRNR)+P(NNRNR)+P(NNNRNR)=\frac{4}{35}+\frac{3}{35}+\frac{2}{35}+\frac{1}{35}=\frac{10}{35}\\
P(Z_1=3) &= P(X_1=1\cap X_2=4)+P(X_1=2\cap X_2=5)+P(X_1=3\cap X_2=6)\\
&= P(RNNR)+P(NRNNR)+P(NNRNNR)=\frac{3}{35}+\frac{2}{35}+\frac{1}{35}=\frac{6}{35}\\
P(Z_1=4) &= P(X_1=1\cap X_2=5)+P(X_1=2\cap X_2=6)=P(RNNNR)+P(NRNNNR)\\
&= \frac{2}{35}+\frac{1}{35}=\frac{3}{35}\\
P(Z_1=5) &= P(X_1=1\cap X_2=6)=P(RNNNNR)=\frac{1}{35}
\end{aligned}$$

Remarque : on constate que $\sum_{k=1}^{5} P(Z_1=k)=1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}
Z_1(\Omega)=[\![1,5]\!]\\
P(Z_1=1)=\frac{15}{35}\quad P(Z_1=2)=\frac{10}{35}\quad P(Z_1=3)=\frac{6}{35}\quad P(Z_1=4)=\frac{3}{35}\quad P(Z_1=5)=\frac{1}{35}
\end{array}}$$

Loi de Z_2 : Pour déterminer $Z_2(\Omega)$, on utilise classiquement un tableau

$Z_2 = X_3 - X_2$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$	$X_2 = 4$	$X_2 = 5$	$X_2 = 6$
$X_3 = 3$	1	0	-1	-2	-3
$X_3 = 4$	2	1	0	-1	-2
$X_3 = 5$	3	2	1	0	-1
$X_3 = 6$	4	3	2	1	0
$X_3 = 7$	5	4	3	2	1

A priori, on peut dire que $Z_2(\Omega) = [\![-3,5]\!]$. Néanmoins, puisque la troisième boule rouge ne peut être obtenu avant la deuxième, on ne peut avoir $X_3 \leqslant X_2$ donc toutes les valeurs négatives, au sens large, de Z_2 sont impossibles donc $Z_2(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et il est évident que toutes ses valeurs sont possibles.

Calculons maintenant les probabilités correspondantes :

$$\begin{aligned}
P(Z_2=1) &= P(X_2=2\cap X_3=3)+P(X_2=3\cap X_3=4)+P(X_2=4\cap X_3=5)+P(X_2=5\cap X_3=6)\\
&\quad +P(X_2=6\cap X_3=7)\\
&= P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=3)+P(X_2=3)P_{(X_2=3)}(X_3=4)+P(X_2=4)P_{(X_2=4)}(X_3=5)\\
&\quad +P(X_2=5)P_{(X_2=5)}(X_3=6)+P(X_2=6)P_{(X_2=6)}(X_3=7)\\
&= \frac{1}{7}\times\frac{1}{5}+\frac{8}{35}\times\frac{1}{4}+\frac{9}{35}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{35}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{1}=\frac{15}{35}\\
P(Z_2=2) &= P(X_2=2\cap X_3=4)+P(X_2=3\cap X_3=5)+P(X_2=4\cap X_3=6)+P(X_2=5\cap X_3=7)\\
&= P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=4)+P(X_2=3)P_{(X_2=3)}(X_3=5)+P(X_2=4)P_{(X_2=4)}(X_3=6)\\
&\quad +P(X_2=5)P_{(X_2=5)}(X_3=7)\\
&= \frac{1}{7}\times\left[\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\right]+\frac{8}{35}\times\left[\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right]+\frac{9}{35}\times\left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right]+\frac{8}{35}\times\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right]=\frac{10}{35}\\
P(Z_2=3) &= P(X_2=2\cap X_3=5)+P(X_2=3\cap X_3=6)+P(X_2=4\cap X_3=7)\\
&= P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=5)+P(X_2=3)P_{(X_2=3)}(X_3=6)+P(X_2=4)P_{(X_2=4)}(X_3=7)\\
&= \frac{1}{7}\times\left[\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right]+\frac{8}{35}\times\left[\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right]+\frac{9}{35}\times\left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right]=\frac{6}{35}\\
P(Z_2=4) &= P(X_2=2\cap X_3=6)+P(X_2=3\cap X_3=7)=P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=6)\\
&\quad +P(X_2=3)P_{(X_2=3)}(X_3=7)\\
&= \frac{1}{7}\times\left[\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right]+\frac{8}{35}\times\left[\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right]=\frac{3}{35}\\
P(Z_2=5) &= P(X_2=2\cap X_3=7)=P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=7)=\frac{1}{7}\times\left[\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right]=\frac{1}{35}
\end{aligned}$$

Remarque : on constate que $\sum_{k=1}^{5} P(Z_2=k)=1$.

N'ayant guère envie de taper la justification complète de tous les calculs, je vais détaillé le calcul de la probabilité conditionnelle $P_{(X_2=3)}(X_3=6)$: *La seconde boule rouge est obtenue au tirage numéro 3, donc une boule rouge a été obtenu aux deux premiers tirages ainsi qu'une boule noire. Ainsi, 3 boules ont été piochées dont 2 rouges et 1 noire, ce qui implique que l'urne contient désormais 7-3=4 boules dont 3 boules noires et 1 boule rouge. Pour que la troisième boule rouge soit piochée au tirage numéro 6, il faut piocher successivement deux boules noires puis une boule rouge donc* $P_{(X_2=3)}(X_3=6)=\underbrace{\frac{3}{4}}_{N}\times\underbrace{\frac{2}{3}}_{N}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_2(\Omega)=[\![1,5]\!] \\ P(Z_2=1)=\dfrac{15}{35}\quad P(Z_2=2)=\dfrac{10}{35}\quad P(Z_2=3)=\dfrac{6}{35}\quad P(Z_2=4)=\dfrac{3}{35}\quad P(Z_2=5)=\dfrac{1}{35}\end{array}}$$

Je laisse le soin au lecteur de vérifier directement que $E(Z_1)=E(Z_2)=2$.
De façon étonnante, les variables Z_1 et Z_2 suivent la même loi. Est-ce un hasard ? Nous verrons un jour.

(c) La variable Z_1 (resp. Z_2) représente le temps d'attente nécessaire pour obtenir le seconde (resp. troisième) boule rouge après l'obtention de la première (deuxième) boule rouge