correction de l'exercice 1

1. (a) La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2+5 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour commencer, on a : $x^3 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$). Comme $0 \in \mathbb{R}$ (*autrement dit* $f(\mathbb{R})$), l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent sur $\mathbb{R}$ de 0 par f). Par conséquent, l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (c) On compare les images $f(0)$, $f(\alpha)$ et $f(\frac{1}{2})$. On a :

$$f(0) = -1, \quad f(\alpha) = 0, \ (\alpha \text{ est solution de l'équation } f(x) = 0), \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{13}{8}$$

   De façon évidente, on a : $f(0) < f(\alpha) < f(\frac{1}{2})$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

2. (a) Pour commencer, on a : $(E_n) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n}$. D'après la question 1.b) la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall n \geqslant 1, \ \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ (*autrement dit* $f(\mathbb{R})$), l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicté de l'antécédent sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{n}$ par f). Par conséquent, l'équation $x^3 + 5x - 1 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (b) On compare les images. On a :

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \ (\alpha_n \text{ est solution de l'équation } f(x) = \frac{1}{n}) \quad \text{et} \quad f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

   De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f(\alpha_{n+1}) \leqslant f(\alpha_n)$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ donc la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante

   (c) On compare les images : On a :

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$$

   De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f(\alpha) \leqslant f(\alpha_n)$ et puisque f est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha \leqslant \alpha_n$.

   (d) La suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et minorée par α donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.

   (e) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow (\alpha_n)^3 + 5\alpha_n - 1 = \frac{1}{n}$$

   Si L désigne la limite de la suite $(\alpha_n)_n$, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$L^3 + 5L - 1 = 0$$

   Ainsi L est solution de l'équation $f(x) = 0$ et, d'après la question 1.b), l'unique solution de cette équation est α donc $L = \alpha$ et la suite $(\alpha_n)_n$ converge donc vers α.

3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on introduit la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 5x - 1$$

   Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = nx^{n-1} + 5 > 0$$

   La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$ (puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$). Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent sur $\mathbb{R}_+$ de 0 par $f_,$). Par conséquent, l'équation $x^n + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) **Calcul de** β_0 : β_0 est l'unique solution positive de

$$(E_0) : x^0 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

   donc $\beta_0 = 0$
   Calcul de β_1 : β_1 est l'unique solution positive de

$$(E_1) : x^1 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

   donc $\beta_1 = \frac{1}{6}$
   Calcul de β_2 : β_2 est l'unique solution positive de

$$(E_2) : x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

donc $\beta_2 = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ (c'est la seule solution positive)

(c) On compare les images par f_n. On a :

$$\begin{aligned} f_n(0) &= -1, \quad f_n(\frac{1}{5}) = (\frac{1}{5})^n + 5(\frac{1}{5}) - 1 = (\frac{1}{5})^n, \\ f_n(\beta_n) &= 0 \quad (\beta_n \text{ est solution de } f_n(x) = 0) \end{aligned}$$

De façon évidente, on a : $\forall n \geqslant 0, \quad f_n(0) \leqslant f_n(\beta_n) \leqslant f_n(\frac{1}{5})$ et puisque f_n est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant \frac{1}{5}.$$

(d) L'inégalité précédente montre que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant (\beta_n)^n \leqslant (\frac{1}{5})^n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{5})^n = 0$ (suite géométrique de raison appartenant à $]-1,1[$), le théorème d'encadrement s'applique, ce qui montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.

(e) Le réel β_n vérifie l'équation

$$f_n(\beta_n) = 0 \Leftrightarrow (\beta_n)^n + 5\beta_n - 1 = 0 \Leftrightarrow (\beta_n)^n = 1 - 5\beta_n$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 5\beta_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \dfrac{1}{5}$

(f) i. On étudie le signe de la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ lorsque $x \in]0,1[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 5x - 1 - (x^n + 5x - 1) = x^{n+1} - x^n = \underbrace{x^n}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{<0} < 0$$

donc $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

ii. En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n \in]0,1[$, on obtient $f_{n+1}(\beta_n) < f_n(\beta_n)$. Puisque β_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, on en déduit que $f_n(\beta_n) = 0$ donc $f_{n+1}(\beta_n) < 0$.

iii. Puisque β_{n+1} est solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$, on en déduit que $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$.
Nous savons que $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\beta_n) < 0$ donc $f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$.

iv. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante et bijective sur $[0,1]$, l'inégalité précédente implique que $\beta_n < \beta_{n+1}$ donc la suite $(\beta_n)_n$ est strictement croissante.

correction de l'exercice 2

1. On introduit l'évènement

A : " le fumeur peut allumer sa cigarette avec les 4 allumettes "

L'évènement contraire $\overline{A}$ est défini par

$\overline{A}$: " le fumeur n'allume pas sa cigarette avec les 4 allumettes "

Autrement dit, $\overline{A}$ se réalise si et seulement chaque allumette s'éteint avant qu'il puisse allumer sa cigarette, avec une probabilité p pour chaque allumette. Par conséquent, l'extinction de chaque allumette étant indépendante des autres, on en déduit que

$$P(\overline{A}) = p^4 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - p^4$$

2. Pour commencer $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,4]\!], \quad P(X = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$$

Justification du calcul :
On choisit k allumettes, parmi les 4 disponibles, qui vont s'éteindre ($\binom{4}{k}$ choix), chacune de ces allumettes va permettre au fumeur d'allumer sa cigarette (probabilité p pour chacune donc p^k pour les k), et les $4-k$ autres ne vont pas permettre au fumeur d'allumer sa cigarette (pour chaque allumette, une probabilité p donc une probabilité p^{4-k} pour les $4-k$)

3. **Calcul de** $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{4} kP(x = k) \\ &= 1 \times 4(1-p)p^3 + 2 \times 6(1-p)^2p^2 + 3 \times 4(1-p)^3p + 4(1-p)^4 \\ &= 4 - 4p = 4(1-p) \quad \text{(en développant brutalement)} \end{aligned}$$

Calcul de $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{4} k^2 P(X = k) \\ &= 1 \times 4(1-p)p^3 + 4 \times 6(1-p)^2p^2 + 9 \times 4(1-p)^3p + 16(1-p)^4 \\ &= 12p^2 - 28p + 16 \quad \text{(en développant brutalement)} \end{aligned}$$

Calcul de $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 12p^2 - 28p + 16 - [4(1-p)]^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p)$$

correction de l'exercice 3

1. Puisque $n \geqslant 7$, on a $n-4 \geqslant 3$ donc l'urne contient au moins 3 boules noires. Par conséquent, on peut 0,1,2,3 boules noires (donc 3,2,1,0 boules rouges).
   Ainsi $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et
   $$\forall k \in [\![0,3]\!], \quad P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{n-4}{3-k}}{\binom{n}{3}}$$
   Justification du calcul :
   Pour choisir 3 boules sans remise parmi les $4+(n-4)=n$ boules disponibles, il y a $\binom{n}{3}$ choix. Pour les cas favorables, on doit choisir k boules rouges parmi les 4 ($\binom{4}{k}$ choix) et on doit choisir les $3-k$ restantes parmi les $n-4$ noires ($\binom{n-4}{3-k}$ choix)

2. Puisque $n \geqslant 9$, on a $n-4 \geqslant 5$ donc l'urne contient au moins 5 boules noires. Par conséquent, on peut obtenir 1,2,3,4,5 boules noires (donc 4,3,2,1,0 boules rouges)
   $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$ et
   $$\forall k \in [\![0,4]\!], \quad P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{n-4}{5-k}}{\binom{n}{5}}$$
   Justification du calcul :
   Pour choisir 5 boules sans remise parmi les $4+(n-4)=n$ boules disponibles, il y a $\binom{n}{5}$ choix. Pour les cas favorables, on doit choisir k boules rouges parmi les 4 ($\binom{4}{k}$ choix) et on doit choisir les $5-k$ restantes parmi les $n-4$ noires ($\binom{n-4}{5-k}$ choix)