correction de l'exercice 1

1. **Etude globale** :
La fonction $x \mapsto 1+x$ est C^1 sur $]-1,+\infty[$ (c'est un polynôme) et $1+x>0$ sur $]-1,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est C^1 sur $]-1,+\infty[$ (car ln es C^1)
On en déduit que la fonction $x \mapsto x-\ln(1+x)$ est C^1 sur $]-1,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto x$ (le dénominateur) est C^1 sur $]-1,+\infty[$.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[\backslash\{0\}, \quad x \neq 0$ (le dénominateur ne s'annule pas)
donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x-\ln(1+x)}{x}$ est C^1 sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$ et

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien } C^1 \text{ sur }]-1,+\infty[\backslash\{0\}}$$

Etude locale de la continuité en 0 :
On effectue un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, ce qui nous donne

$$x-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Par conséquent, on obtient que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \dfrac{x}{2}$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ donc la fonction f est continue en 0. La fonction f est continue sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$ (car elle y est C^1) et en 0 donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur }]-1,+\infty[}$$

Etude du caractère C^1 de la fonction f en 0 :
Classiquement, on applique le théorème de prolongement continue de la dérivée et la seule hypothèse qui n'est pas vérifiée est l'exercice de $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Pour commencer, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) &= \frac{(1-\frac{1}{1+x})x-(x-\ln(1+x))}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{x^2} = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}
\end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent du numérateur, on effectue un développement limité à l'ordre 2 de celui-ci en 0

$$x-(1+x)\ln(1+x) = x-(1+x)(x-\frac{x^2}{2})+o(x^2)) = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2(1+x)} = -\dfrac{1}{2(1+x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{2(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.
Par conséquent, la fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$, C^1 sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

Pour finir, la dérivée de f sur $]-1,+\infty[$ est donnée par

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\backslash\{0\} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x=0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{et l'équation de la tangente est } y = f'(0)(x-0)+f(0) = -\frac{1}{2}x}$$

2. La fonction $x \mapsto g(x) = -x+(1+x)\ln(x+1)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g'(x) = -\ln(1+x)$$

Ainsi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < 0 \Leftrightarrow 1+x < e^0 = 1 \Leftrightarrow x < 0$, ce qui nous donne le tableau de variation de g

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$\boxed{\text{donc la fonction } x \mapsto -x + (1+x)\ln(x+1) \text{ est positive sur }]-1,+\infty[}$$

Une droite est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul, donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ est un point d'abscisse a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$. Puisque $f'(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$, on a nécessairement $a \neq 0$, ce qui nous donne :

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a - (1+a)\ln(1+a)}{a^2(1+a)} = 0 \Leftrightarrow a - (1+a)\ln(1+a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

(d'après le tableau de variation précédent), ce qui est absurde car on a montré que $a \neq 0$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, le graphe } \mathcal{C}_f \text{ n'admet aucune tangente horizontale.}}$$

3. D'après la question précédente, on a :

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$(1+x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est négative sur }]-1,0[\text{, positive sur }]0,+\infty[\text{ et elle s'annule uniquement en } x=0}$$

4. **Asymptote en -1** :
Puisque $x \mapsto -1^+$, $\ln(1+x) \to -\infty$, $x \mapsto -1$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} = +\infty$ ("$\dfrac{-1-(\infty)}{-1} = -\infty$").

$$\boxed{\text{La droite verticale } x = -1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ au point d'abscisse } -1}$$

5. **Asymptote en $+\infty$** : En utilisant les règles de calcul de limites par addition, etc., on aboutit à la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour la lever, on dispose de deux méthodes :
Première méthode : on effectue le changement de variable $X = 1 + x \Leftrightarrow x = X - 1$. Lorsque $x \mapsto +\infty$, $X \mapsto +\infty$ et l'on a :

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x} = \frac{X - 1 - \ln X}{X - 1} = \frac{X(1 - \frac{1}{X} - \frac{\ln X}{X})}{X(1 - \frac{1}{X})} = \frac{1 - \frac{1}{X} - \overbrace{\boxed{\frac{\ln X}{X}}}^{\to 0}}{1 - \frac{1}{X}} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

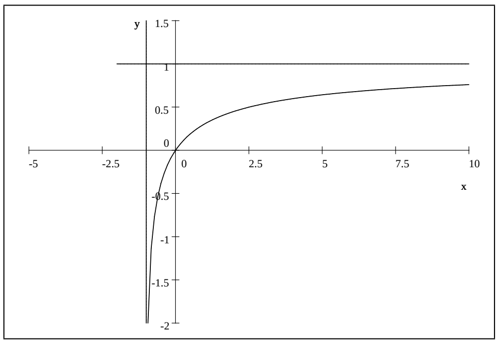
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\boxed{\text{la droite } y = 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty.}$

Deuxième méthode : on recherche directement un équivalent de $f(x)$. Pour cela, il faut factoriser le terme dominant dans le logarithme, ce qui nous donne

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{\ln[x(1+\frac{1}{x})]}{x} = 1 - \frac{\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$$

Ensuite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \dfrac{1}{x}) = 0$, on en déduit aisément que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

6. Voici le graphe de f et, en pointillé, ses asymptotes en -1 et en $+\infty$



correction de l'exercice 2

1. **Etude globale** :
La fonction $x \mapsto (1+\frac{1}{x})\ln x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (par somme et produit de fonctions C^1) donc la fonction

$$x \mapsto \exp[(1+\frac{1}{x})\ln x] = x^{1+1/x}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car exp est C^1 sur $\mathbb{R}$), ce qui montre que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\times.}$$

Etude de la continuité en 0 :
Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, on aisément l'équivalent suivant : $(1+\frac{1}{x})\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty$ (car $\frac{\ln x}{x} < 0$ lorsque x est proche de 0) donc $\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})\ln x = -\infty$. Comme $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp[(1+\frac{1}{x})\ln x] = 0 = f(0)$$

ce qui démontre que f est continue en 0 et puiqu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle y est C^1), on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

Etude de la dérivabilité en 0 : On considère le taux d'accroissement de f en 0 en $x \neq 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^{1+1/x}}{x} = x^{1/x} = \exp(\frac{\ln x}{x}) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

(car $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$ et $e^X \underset{X\to-\infty}{\to} 0$) donc $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, ce qui implique que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0}$$

2. **Justification de l'inégalité** $\forall x \geqslant 0, \quad \ln x \leqslant x+1$:
On considère la fonction $g(x) = \ln x - (1+x)$. Elle est clairement C^1 sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On en déduit son tableau de variation sur $[0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$-$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

donc la fonction g est négative sur $[0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad \ln x \leqslant 1+x}$$

Calcul de $f'(x)$ pour $x > 0$:

$$f'(x) = [(1+\frac{1}{x})\ln x]' \exp[(1+\frac{1}{x})\ln x] = [-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}]\exp[(1+\frac{1}{x})\ln x] = \frac{-\ln x+1+x}{x^2}\exp[(1+\frac{1}{x})\ln x]$$

D'après l'inégalité $\forall x \geqslant 0, \quad \ln x \leqslant x+1$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) > 0}$$

La fonction f est C^1 sur $]0,+\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (et même sur $[0,+\infty[$).

3. Puisque $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})\ln x = +\infty$ donc, étant donné que $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
Etude de l'asymptote en $+\infty$:
Etude de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:
On a $\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{x^{1+1/x}}{x} = x^{1/x} = \exp(\frac{\ln x}{x})$. Puisque l'on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X\to 0} e^X = 1$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$
Etude de $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$:
$f(x) - x = x^{1+1/x} - x = x(x^{1/x}-1) = x(\exp(\frac{\ln x}{x})-1)$.
Recherchons un équivalent de $\exp(\frac{\ln x}{x})-1$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, on effectue le changement de variable $X = \frac{\ln x}{x}$.
Lorsque $x \to +\infty$, $X \to 0$ et $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $\exp(\frac{\ln x}{x}) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.
On en déduit alors immédiatement que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{\ln x}{x} = \ln x$. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$ et

$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique de direction } y = x.}$$

Remarque : Si l'on utilise le $DL_2(0)$ de $\exp x$, on obtient

$$f(x) = x[\exp(\frac{\ln x}{x})-1] = x[1+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}(\frac{\ln x}{x})^2 + o((\frac{\ln x}{x})^2)] = x + \ln x + \frac{1}{2}\times\frac{(\ln x)^2}{x} + o(\frac{(\ln x)^2}{x})$$

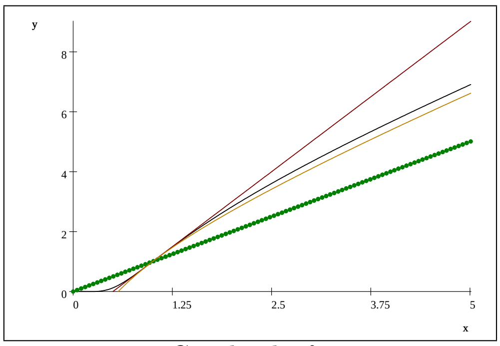
donc $f(x) - (x+\ln x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\times\frac{(\ln x)^2}{x}$ *et comme* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty$, *on obtient que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+\ln x) = 0$.
Ainsi, la courbe d'équation $y = x + \ln x$ est asymptote (au sens primitif de la définition d'une asymptote) à C_f.

4. L'équation de la tangente T est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ et comme

$$f(1) \quad = \quad 1^2 = 1 \text{ et } f'(1) = \frac{-\ln 1 + 1 + 1}{1^2}\exp[(1+\frac{1}{1})\ln 1] = 2,$$

$$\boxed{\text{on a : } (T) : y = 2(x-1)+1 = 2x-1}$$

En noire : $\mathcal{C}_f$, En rouge et en pointillé fin ; la tangente T. En vert et en "gros points": la branche parabolique $y = x$. En Sienne et en "cercles", la véritable asymptote $y = x + \ln x$



Graphe de f.