**correction de l'exercice 1**

1. L'évènement $A_k$ se réalise si et seulement la secretaire a contacté $k$ correspondants et elle n'a pas réussit à contacter les $3-k$ autres. On introduit l'évènement :

$$C_k : \text{" réussir à contacter le } k^{\text{ième}} \text{ correspondant "}$$

Par exemple, l'évènement $C_2$ est l'évènement " réussir à contacter le $2^{\text{ième}}$ correspondant ". Les évènements $C_k$ sont mutuellement indépendants.
**Première méthode** :

- L'évènement $A_0$ s'écrit $A_0 = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}$ donc

$$p(A_0) = p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}) = p(\overline{C_1})p(\overline{C_2})p(\overline{C_3}) = (\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{125} = 0.512$$

- L'évènement $A_1$ s'écrit $A_1 = (C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)$. L'union précédente étant disjointe, on a donc

$$\begin{aligned} p(A_1) &= p(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}) + p(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3}) + p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3) \\ &= p(C_1)p(\overline{C_2})p(\overline{C_3}) + p(\overline{C_1})p(C_2)p(\overline{C_3}) + p(\overline{C_1})p(\overline{C_2})p(C_3) \\ &= (\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2 + (\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2 + (\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2 = 3(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2 = \frac{48}{125} = 0.384 \end{aligned}$$

- L'évènement $A_2$ s'écrit $A_2 = (\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3})$. L'union précédente étant disjointe, on a donc

$$\begin{aligned} p(A_2) &= p(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3) + p(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3) + p(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}) \\ &= p(\overline{C_1})p(C_2)p(C_3) + p(C_1)p(\overline{C_2})p(C_3) + p(C_1)p(C_2)p(\overline{C_3}) \\ &= (\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1 + (\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1 + (\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1 = 3(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1 = \frac{12}{125} = 0.096 \end{aligned}$$

- L'évènement $A_3$ s'écrit $A_0 = C_1 \cap C_2 \cap C_3$ donc

$$p(A_3) = p(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = p(C_1)p(C_2)p(C_3) = (\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125} = 0.008$$

| | |
|---|---|
| Par conséquent, la secrétaire a : | · 51,2 % de chance d'obtenir aucun correspondant |
| | · 38,4 % de chance d'obtenir un correspondant |
| | · 9,6 % de chance d'obtenir deux correspondants |
| | · 0,8 % de chance d'obtenir trois correspondants |

**Deuxième méthode (à connaitre)** : Puisque la réussite de contact d'un correspondant est indépendant de la réussite de contact de tout autre correspondant, on choisit $k$ correspondants parmi les 3 possibles ($\binom{3}{k}$ choix), la probabilité de contacter ces $k$ correspondants vaut $(\frac{1}{5})^k$ et la probabilité de ne pas contacter les $3-k$ autres vaut $(\frac{4}{5})^k$ donc

$$\forall k \in [\![0,3]\!], \quad P(A_k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{3-k},$$

ce qui nous donne

$$P(A_0) = \binom{3}{0}(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^{3-0} = (\frac{4}{5})^3, \qquad P(A_1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^{3-1} = 3(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2,$$
$$P(A_2) = \binom{3}{2}(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^{3-2} = 3(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1, \quad P(A_3) = \binom{3}{3}(\frac{1}{5})^3(\frac{4}{5})^{3-3} = (\frac{1}{5})^3$$

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{A_i}(B_j)$ signifie que l'évènement " la secretaire a obtenu $i$ correspondants à la première série d'appels " est réalisé et que l'on souhaite que la secrétaire obtiennent $j$ correspondants lors des deux séries d'appels.
Pour commencer, on remarque que la secrétaire ne peut avoir contactée strictement plus de contacts à la première série d'appels qu'à la fin des deux séries d'appels donc les probabilités conditionnelles suivantes sont nulles.

$$P_{A_1}(B_0) = P_{A_2}(B_0) = P_{A_3}(B_0) = P_{A_2}(B_1) = P_{A_3}(B_1) = P_{A_3}(B_2) = 0$$

Il reste donc " seulement " dix probabilités conditionnelles à calculer.

- $P_{A_0}(B_0)$ : La secrétaire a contacté aucun correspondant lors de la première série d'appels et elle ne réussit à contacter aucun de ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle les trois correspondants et elle ne réussit à contacter aucun des trois correspondants rappelés donc

$$p_{A_0}(B_0) = (\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{125} = 0.512$$

- $P_{A_0}(B_1)$ : la secrétaire a contacté aucun correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter un de ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle les trois correspondants et elle réussit à contacter un des trois correspondants rappelés. Pour cela, on choisit un des trois correspondants appelés à la seconde série d'appels ($\binom{3}{1}$ choix), la probabilité que ce correspondant soit contacté vaut $\frac{1}{5}$ et la probabilité que les deux autres correspondants ne soient pas contactés vaut $(\frac{4}{5})^2$ donc

$$p_{A_0}(B_1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})^2 = \frac{48}{125} = 0.384$$

- $p_{A_1}(B_1)$ : la secrétaire a contacté un correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter un des trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle deux correspondants (ceux qui non pas été contactés lors de a première série d'appels) et elle ne réussit à contacter aucun des ces deux correspondants rappelés donc

$$p_{A_1}(B_1) = (\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} = 0.64$$

- $p_{A_0}(B_2)$ : la secrétaire a contacté aucun correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter deux de ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, elle rappelle les trois correspondants et elle réussit à contacter deux des trois correspondants rappelés. Pour cela, on choisit deux des trois correspondants appelés à la seconde série d'appels ($\binom{3}{2}$ choix), la probabilité que ces deux correspondants soient contactés vaut $(\frac{1}{5})^2$ et la probabilité que l'autre correspondant ne soit pas contacté vaut $(\frac{4}{5})$ donc

$$p_{A_0}(B_2) = \binom{3}{2}(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5}) = \frac{12}{125} = 0.096$$

- $p_{A_1}(B_2)$ : la secrétaire a contacté un correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter deux de ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle deux correspondants (ceux qui n'ont pas été contactés lors de la première série d'appels) et elle réussit à contacter un de ces deux correspondants rappelés. Pour cela, on choisit un des deux correspondants appelés à la seconde série d'appels ($\binom{2}{1}$ choix), la probabilité que ce correspondant soit contacté vaut $\frac{1}{5}$ et la probabilité que l'autre correspondant ne soit pas contacté vaut $(\frac{4}{5})$ donc

$$p_{A_1}(B_2) = \binom{2}{1}(\frac{1}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{8}{25} = 0.32$$

- $p_{A_2}(B_2)$ : la secrétaire a contacté deux correspondants lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter deux de ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle un correspondant (celui qui n'a pas été contacté lors de la première série d'appels) et elle ne réussit pas à le contacter donc

$$p_{A_2}(B_2) = \frac{4}{5} = 0.8$$

- $p_{A_0}(B_3)$ : La secrétaire a contacté aucun correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle les trois correspondants et elle réussit à contacter les trois correspondants rappelés donc

$$p_{A_0}(B_3) = (\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125} = 0.008$$

- $p_{A_1}(B_3)$ : la secrétaire a contacté un correspondant lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle deux correspondants (ceux qui n'ont pas été contactés lors de la première série d'appels) et elle réussit à les contacter tous les deux donc

$$p_{A_1}(B_3) = (\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25} = 0.04$$

- $p_{A_2}(B_3)$ : la secrétaire a contacté deux correspondants lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire rappelle le correspondant non contacté lors de la première série d'appels et elle réussit à le contacter donc

$$p_{A_2}(B_3) = \frac{1}{5} = 0.2$$

- $p_{A_3}(B_3)$ : la secrétaire a contacté les trois correspondants lors de la première série d'appels et elle réussit à contacter ces trois correspondants à la fin des deux séries d'appels. Autrement dit, la secrétaire ne rappelle aucun des correspondant et elle ne réussit pas à le contacter personne lors de la deuxième série d'appel. Cet évènement se réalisant toujours, on a donc

$$p_{A_3}(B_3) = 1$$

Le tableau suivant résume les valeurs des 16 probabilités calculées :

| $P_{A_i}(B_j)$ | $j=0$ | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | $64/125$ | $48/125$ | $12/125$ | $1/125$ |
| $i=1$ | $0$ | $16/25$ | $8/25$ | $1/25$ |
| $i=2$ | $0$ | $0$ | $4/5$ | $1/5$ |
| $i=3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ |

(b) L'obtention du nombre total de correspondants contactés lors des deux séries d'appels par la sécrétaire dépend fortement du nombre de correspondants contactés par la secrétaire lors de la première série d'appel. On introduit alors naturellement le système complet d'évènements $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ et la formule des probabilités totales s'applique, ce qui nous donne :

- **Calcul de** $P(B_0)$ :

$$\begin{aligned} p(B_0) &= p(A_0 \cap B_0) + p(A_1 \cap B_0) + p(A_2 \cap B_0) + p(A_3 \cap B_0) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_0) + p(A_1)\underbrace{p_{A_1}(B_0)}_{=0} + p(A_2)\underbrace{p_{A_2}(B_0)}_{=0} + p(A_3)\underbrace{p_{A_3}(B_0)}_{=0} \\ &= \frac{64}{125} \times \frac{64}{125} = \frac{4096}{15\,625} = 0.262\,14 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La secrétaire a environ 26,2 \% de chance de contacter aucun des trois correspondants en deux séries d'appels}}$

- **Calcul de** $P(B_1)$ :

$$\begin{aligned} p(B_1) &= p(A_0 \cap B_1) + p(A_1 \cap B_1) + p(A_2 \cap B_1) + p(A_3 \cap B_1) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_1) + p(A_1)p_{A_1}(B_1) + p(A_2)\underbrace{p_{A_2}(B_1)}_{=0} + p(A_3)\underbrace{p_{A_3}(B_1)}_{=0} \\ &= \frac{64}{125} \times \frac{48}{125} + \frac{48}{125} \times \frac{16}{25} = \frac{6912}{15\,625} = 0.442\,37 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La secrétaire a environ 44,2 \% de chance de contacter un des trois correspondants en deux séries d'appels}}$

- **Calcul de** $P(B_2)$ :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(A_0 \cap B_2) + p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) + p(A_3 \cap B_2) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_2) + p(A_1)p_{A_1}(B_2) + p(A_2)p_{A_2}(B_2) + p(A_3)\underbrace{p_{A_3}(B_2)}_{=0} \\ &= \frac{64}{125} \times \frac{12}{125} + \frac{48}{125} \times \frac{8}{25} + \frac{12}{125} \times \frac{4}{5} = \frac{3888}{15\,625} = 0.248\,83 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La secrétaire a environ 24,9 \% de chance de contacter aucun des trois correspondants en deux séries d'appels}}$

- **Calcul de** $P(B_3)$ :

$$\begin{aligned} p(B_3) &= p(A_0 \cap B_3) + p(A_1 \cap B_3) + p(A_2 \cap B_3) + p(A_3 \cap B_3) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_3) + p(A_1)p_{A_1}(B_3) + p(A_2)p_{A_2}(B_3) + p(A_3)p_{A_3}(B_3) \\ &= \frac{64}{125} \times \frac{1}{125} + \frac{48}{125} \times \frac{1}{25} + \frac{12}{125} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{125} \times 1 = \frac{729}{15\,625} = 0.046\ 656 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La secrétaire a environ 4,7 \% de chance de contacter aucun des trois correspondants en deux séries d'appels}}$

**correction de l'exercice 2**

1. L'évènement $A_k$ se réalise si et seulement si le joueur obtient $k$ numéros gagnants et les $2-k$ autres numéros obtenus sont non gagnants. Autrement dit, puisque les tirages sont sans remise, pour les cas possibles, il choisit 2 cartes parmi les 10 disponibles ($\binom{10}{2}$ choix) et pour les cas favorables, il doit choisir $k$ numéros gagnant parmi les 2 numéros gagnants possibles ($\binom{2}{k}$ choix) et il choisit $2-k$ numéros possibles parmi les 10-2=8 numéros non gagnants ($\binom{8}{2-k}$ choix), ce qui nous donne
$$\forall k \in [\![0,2]\!], \quad p(A_k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{2-k}}{\binom{10}{2}},$$
ce que l'on peut expliciter sous la forme
$$\begin{aligned} p(A_0) &= \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{2-0}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45} = 0.622 \pm 10^{-3} \\ p(A_1) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2-1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45} = 0.356 \pm 10^{-3} \\ p(A_2) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2-2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45} = 0.022 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

| Au premier tirage, le joueur a donc environ : | · 62,2 % de chance d'obtenir aucun des deux numéros gagnants,<br>· 35,2 % de chance d'obtenir un des deux numéros gagnants<br>· 2,2 % de chance d'obtenir les deux numéros gagnants |
|---|---|

2. L'obtention des boules au second tirage dépend fortement du nombre de numéros gagnants et non gagnants au premier tirage. On introduit alors le système complet d'évènements $(A_0, A_1, A_2)$. La formule des probabilités totales appliquées à ce système complet d'évènements nous donne :
$$\forall k \in [\![0,2]\!], \quad p(B_k) = p(A_0 \cap B_k) + p(A_1 \cap B_k) + p(A_2 \cap B_k)$$
Nous allons maintenant expliciter ces différentes probabilités.

   - **Calcul de** $p(B_0)$ :
$$\begin{aligned} p(B_0) &= p(A_0 \cap B_0) + p(A_1 \cap B_0) + p(A_2 \cap B_0) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_0) + p(A_1)p_{A_1}(B_0) + p(A_2)p_{A_2}(B_0) \\ &= \frac{28}{45} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{16}{45} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{45} \times 1 \\ &= \frac{343}{675} = 0.508 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$
*Justification du calcul des probabilités conditionnelles :*
$\underline{P_{A_0}(B_0)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne aucun numéro gagnant au second tirage sachant qu'il n'a obtenu aucun numéro gagnant au second tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux numéros non gagnants obtenus par le joueur, il retire également deux autres numéros non gagnants puis le joueur pioche au second tirage deux numéros parmi les six numéros restants dont 4 sont non gagnants et 2 sont gagnants et il doit obtenir deux numéros non gagnants. Par conséquent, pour les cas possibles, le joueur choisit 2 numéros parmi les 6 disponibles (* $\binom{6}{2}$ *choix) et pour les cas favorables, il doit choisir 2 numéros non gagnants parmi les 4 numéros non gagnants présents au second tirage d'où* $P_{A_0}(B_0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}$
$\underline{P_{A_1}(B_0)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne aucun numéro gagnant au second tirage sachant qu'il n'a obtenu aucun numéro gagnant au premier tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux numéros non gagnants obtenus par le joueur, il retire également deux autres numéros non gagnants puis le joueur pioche au second tirage deux numéros parmi les six numéros restants dont 4 sont non gagnants et 2 sont gagnants et il doit obtenir deux numéros non gagnants. Par conséquent, pour les cas possibles, le joueur choisit 2 numéros parmi les 6 disponibles (* $\binom{6}{2}$ *choix) et pour les cas favorables, il doit choisir 2 numéros non gagnants parmi les 5 numéros non gagnants présents au second tirage d'où* $P_{A_1}(B_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}}$
$\underline{P_{A_2}(B_0)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne aucun numéro gagnant au second tirage sachant qu'il a obtenu les deux numéros gagnants au premier tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux numéros gagnants obtenus par le joueur, il retire également deux autres numéros non gagnants puis le joueur pioche au second tirage deux numéros parmi les six numéros restants qui sont tous perdants. Par conséquent, il est certain que le joueur ne pioche aucune numéro gagnant au second tirage et l'on a* $P_{A_2}(B_0) = 1$

- **Calcul de** $p(B_1)$ :

$$\begin{aligned} p(B_1) &= p(A_0\cap B_1)+p(A_1\cap B_1)+\underbrace{p(A_2\cap B_1)}_{=0} \\ &= p(A_0)p_{A_0}(B_1)+p(A_1)p_{A_1}(B_1) \\ &= \frac{28}{45}\times\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}+\frac{16}{45}\times\frac{\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}} \\ &= \frac{304}{675}=0.450\pm 10^{-3} \end{aligned}$$

*Justification du calcul des probabilités conditionnelles :*
$\underline{P_{A_0}(B_1)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne un numéro gagnant au second tirage sachant qu'il n'a obtenu aucun numéro gagnant au premier tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux numéros non gagnants obtenus par le joueur, il retire également deux autres numéros non gagnants puis le joueur pioche au second tirage deux numéros parmi les six numéros restants dont 4 sont non gagnants et 2 sont gagnants et il doit obtenir un numéro non gagnant et un numéro gagant. Par conséquent, pour les cas possibles, le joueur choisit 2 numéros parmi les 6 disponibles (* $\binom{6}{2}$ *choix) et pour les cas favorables, il doit choisir 1 numéro gagnant parmi les deux numéros gagnants présents au second tirage (* $\binom{2}{1}$ *choix) et il doit choisir 1 numéro non gagnant parmi les 4 numéros non gagnants présents au second tirage (* $\binom{4}{1}$ *choix) d'où* $P_{A_0}(B_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}$
$\underline{P_{A_1}(B_1)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne un numéro gagnant au second tirage sachant qu'il n'a obtenu un numéro gagnant au premier tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux cartes obtenus par le joueur dont une est gagnante et l'autre est non gagnante, il retire également deux autres cartes non gagnantes puis le joueur pioche au second tirage deux cartes parmi les six cartes restantes dont 5 sont non gagnantes et 1 est gagnante et il doit obtenir une carte non gagnante et une carte gagante. Par conséquent, pour les cas possibles, le joueur choisit 2 cartes parmi les 6 disponibles (* $\binom{6}{2}$ *choix) et pour les cas favorables, il doit choisir 1 carte gagnante parmi la seule carte gagnante présente au second tirage (* $\binom{1}{1}$ *choix) et il doit choisir 1 carte non gagnante parmi les 5 cartes non gagnantes présentent au second tirage (* $\binom{5}{1}$ *choix) d'où* $P_{A_1}(B_1)=\frac{\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}}$
$\underline{p(A_2\cap B_1)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne un numéro gagnant au second tirage et qu'il obtienne les deux numéros gagnants au premier tirage. Cet évènement est impossible car s'il obtient les deux numéros gagnants au premier tirage, au second tirage il ne peut piocher que parmi des numéros non gagnants donc il ne peut obtenir un numéro gagnant au second tirage (les pioches sont sans remise) donc* $p(A_2\cap B_1)=0$

- **Calcul de** $p(B_2)$ :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(A_0\cap B_2)+\underbrace{p(A_1\cap B_2)}_{=0}+\underbrace{p(A_2\cap B_2)}_{=0}=p(A_0)p_{A_0}(B_2) \\ &= \frac{28}{45}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{28}{675}=0.042\pm 10^{-3} \end{aligned}$$

*Justification du calcul des probabilités conditionnelles :*
$\underline{P_{A_0}(B_2)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne deux numéros gagnants au second tirage sachant qu'il n'a obtenu aucun numéro gagnant au premier tirage, c'est-à-dire qu'à la fin du premier tirage, le meneur de jeu enlève les deux numéros non gagnants obtenus par le joueur, il retire également deux autres numéros non gagnants puis le joueur pioche au second tirage deux numéros parmi les six numéros restants dont 4 sont non gagnants et 2 sont gagnants et il doit obtenir deux numéros gagnants. Par conséquent, pour les cas possibles, le joueur choisit 2 numéros parmi les 6 disponibles (* $\binom{6}{2}$ *choix) et pour les cas favorables, il doit choisir 2 numéros gagnants parmi les deux numéros gagnants présents au second tirage (* $\binom{2}{2}$ *choix) d'où* $P_{A_0}(B_2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}$
$\underline{p(A_1\cap B_2)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne deux numéros gagnants au second tirage et qu'il obtienne un numéro gagnant au premier tirage. Cet évènement est impossible car s'il obtient un numéro gagnant au premier tirage, au second tirage il ne peut piocher que parmi 5 numéros non gagnants et 1 numéro gagnant donc il ne peut obtenir deux numéros gagnants au second tirage (les pioches sont sans remise) donc* $p(A_1\cap B_2)=0$
$\underline{p(A_2\cap B_2)}$ *: il s'agit de la probabilité que le joueur obtienne deux numéros gagnants au second tirage et qu'il obtienne deux numéros gagnants au premier tirage. Cet évènement est impossible car s'il obtient les deux numéros gagnants au premier tirage, au second tirage il ne peut piocher que parmi 6 numéros non gagnants donc il ne peut obtenir deux numéros gagnants au second tirage donc* $p(A_2\cap B_2)=0$

| | |
|---|---|
| Au second tirage, le joueur a donc environ : | · 50,8 % de chance d'obtenir aucun des deux numéros gagnants,<br>· 45,0 % de chance d'obtenir un des deux numéros gagnants<br>· 4,2 % de chance d'obtenir les deux numéros gagnants |

3. On a 2,2 % de chance d'obtenir les deux numéros gagnants avec la stratégie A (piocher deux numéros et s'arrêter) et on a 4,2 % de chance d'obtenir les deux numéros avec la stratégie B (piocher deux numéros, retirer deux numéros non gagnants puis repiocher deux numéros) donc

$$\boxed{\text{la stratégie B est la meilleure.}}$$

**correction de l'exercice 3**

1. (a) $p(\{PB_1\}) = p(P)P_P(B_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$
*(puisque l'obtention de Pile fait que l'on pioche dans l'urne $U_1$)*

   (b) Puisque les urnes ne contiennent que des boules noires ou blanches, l'évènement $\overline{B_k}$ est également l'évènement " obtenir une boule noire dans l'urne $U_k$ ", les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$ sont :

$$\{PB_1\},\quad \{P\overline{B_1}\},\quad \{PB_2\},\quad \{P\overline{B_2}\},\quad \{\overline{P}B_1\},\quad \{\overline{P}\overline{B_1}\},\quad \{\overline{P}B_2\},\quad \{\overline{P}\overline{B_2}\}$$

   (c) Le protocole de pioche de la boule dépend du résultat de la pièce, ce qui nous fait considérer le système complet d'évènements $(P, \overline{P})$, où $P$ est l'évènement " on obtient pile avec la pièce ". La formule des probabilités totales nous donne :

$$\begin{aligned} p(A_1) &= p(P\cap A_1) + p(\overline{P}\cap A_1) = p(\{P\overline{B_1}\}) + p(\{\overline{P}\overline{B_2}\}) = p(P)p_P(\overline{B_1}) + p(\overline{P})p_{\overline{P}}(\overline{B_2}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{5}{6} \\ p(B_1) &= p(P\cap B_1) + \underbrace{p(\overline{P}\cap B_1)}_{=0} = p(\{PB_1\}) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

*Justification des calculs de probabilités :*
<u>$p(P\cap A_1)$</u> *: L'évènement $P\cap A_1$ se réalise si et seulement on obtient Pile au lancer de pièce et que la boule blanche est dans l'urne $U_1$ à la fin de l'expérience $\mathcal{E}$ donc on doit piocher dans l'urne $U_1$ (Pile de la pièce) et on doit piocher une boule noire dans cette urne (sinon, la pioche d'une boule blanche implique que l'on doit la changer d'urne donc elle est dans l'urne $U_2$ à la fin de l'expérience, par contre, si l'on pioche une boule noire, la boule blanche ne change pas d'urne). Par conséquent, on a bien $P\cap A_1 = \{P\overline{B_1}\}$.*
<u>$p_P(\overline{B_1})$</u> *: on a obtenu Pile, donc on pioche dans l'urne $U_1$, qui contient actuellement 1 boule blanche et deux boules noires, et l'on doit piocher une boule noire donc $p_P(\overline{B_1}) = \dfrac{2}{3}$.*
<u>$p_{\overline{P}}(\overline{B_2})$</u> *: On a obtenu Face au lancer de la pièce, donc on pioche dans l'urne $U_2$, qui ne contient actuellement que des boules noires, et l'on doit obtenir une boule noire ce qui arrive toujours (c'est l'évènement certain) donc $p_{\overline{P}}(\overline{B_2}) = 1$*
<u>$p(P\cap B_1)$</u> *: L'évènement $P\cap B_1$ se réalise si et seulement on obtient Pile au lancer de pièce et que la boule blanche est dans l'urne $U_2$ à la fin de l'expérience $\mathcal{E}$ donc on doit piocher dans l'urne $U_1$ (Pile de la pièce) et on doit piocher la boule blanche dans cette urne (sinon, la pioche d'une boule noire implique que l'on ne va pas changer d'urne la boule blanche donc elle reste dans l'urne $U_1$ à la fin de l'expérience, par contre, si l'on pioche la boule blanche, elle change nécessaire d'urne et à l'issue de l'expérience, elle se trouve dans l'urne $U_2$) Par conséquent, on a bien $P\cap B_1 = \{PB_1\}$*
<u>$p(\overline{P}\cap B_1)$</u> *: L'évènement $\overline{P}\cap B_1$ se réalise si et seulement on obtient Face au lancer de pièce et que la boule blanche est dans l'urne $U_2$ à la fin de l'expérience $\mathcal{E}$ donc on doit piocher dans l'urne $U_2$ (Face de la pièce) et on doit piocher la boule blanche dans l'urne $U_2$ alors que la boule blanche se trouve dans l'urne $U_1$ donc l'évènement $\overline{P}\cap B_1$ est impossible et $p(\overline{P}\cap B_1) = 0$*

2. (a) <u>$P_{A_n}(A_{n+1})$</u> : Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n$.

| instant $t = n$ | | | instant $t = n+1$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 B<br>2 N | 2N | $\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$ | 1 B<br>2 N | 2N |
| $U_1$ | $U_2$ | | $U_1$ | $U_2$ |

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne $U_1$ à l'instant $n$, pour qu'elle soit dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n + 1$, il est nécessaire et suffisant
que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans $U_1$) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne $U_1$ (qui contient 1 blanche et 2 noires)
ou
que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans l'urne $U_2$) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne $U_2$ (qui contient donc 2 noires),
c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{P}\,\overline{B_2}\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{A_n}(A_{n+1}) &= P(\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{P}\,\overline{B_2}\}) = p(\{P\overline{B_1}\}) + p(\{\overline{P}\,\overline{B_2}\}) = p(P)p_P(\overline{B_1}) + p(\overline{P})p_{\overline{P}}(\overline{B_1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$\underline{P_{B_n}(A_{n+1})}$ : Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n$.

| instant $t = n$ | | | instant $t = n+1$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2 N | 1 B<br>2N | $\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$ | 1 B<br>2 N | 2N |
| $U_1$ | $U_2$ | | $U_1$ | $U_2$ |

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne $U_2$ à l'instant $n$, pour qu'elle soit dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n + 1$, il est nécessaire et suffisant que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans $U_2$) et que l'on pioche la boule blanche dans l'urne $U_2$ (qui contient 1 blanche et 2 noires), c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{\overline{P}B_2\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P(\{\overline{P}B_2\}) = p(\overline{P})p_{\overline{P}}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) $\underline{P_{A_n}(B_{n+1})}$ : Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne $U_1$ à l'instant $t = n$.

| instant $t = n$ | | | instant $t = n+1$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 B<br>2 N | 2N | $\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$ | 2 N | 1 B<br>2N |
| $U_1$ | $U_2$ | | $U_1$ | $U_2$ |

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne $U_1$ à l'instant $n$, pour qu'elle soit dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n+1$, il est nécessaire et suffisant que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans $U_1$) et que l'on pioche la boule blanche dans l'urne $U_1$ (qui contient 1 blanche et 2 noires), c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{PB_1\}$ donc

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P(\{PB_1\}) = \frac{1}{6}$$

$\underline{P_{B_n}(B_{n+1})}$ : Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n$.

| instant $t = n$ | | | instant $t = n+1$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2 N | 1 B<br>2N | $\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$ | 2 N | 1 B<br>2N |
| $U_1$ | $U_2$ | | $U_1$ | $U_2$ |

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne $U_2$ à l'instant $n$, pour qu'elle soit dans l'urne $U_2$ à l'instant $t = n + 1$, il est nécessaire et suffisant
que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans $U_1$) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne $U_1$ (qui contient 2 noires)
ou

que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans l'urne $U_2$) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne $U_2$ (qui contient donc 1 blanche et 2 noires),
c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{PB_2}\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{B_n}(B_{n+1}) &= P(\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{PB_2}\}) = p(\{P\overline{B_1}\}) + p(\{\overline{PB_2}\}) = p(P)p_P(\overline{B_1}) + p(\overline{P})p_{\overline{P}}(\overline{B_1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(c) La position de la boule blanche dépend de la position de la boule blanche à l'instant précédent et du résultat du lancer de pièce. Etant donné que la position de la pièce à l'instant précédent est antérieure au résultat de la pièce, on choisit comme système complet d'évènements $(A_n, B_n)$ et non $(P, \overline{P})$.
En outre, le sujet mentionne que le calcul des quatres probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$ donc le sujet suggère que le système complet à considérer est $(A_n, B_n)$.
La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{cases} (1): \quad p(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n)p_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{5}{6}p(A_n) + \dfrac{1}{6}p(B_n) \\ (2): \quad p(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n)p_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{6}p(A_n) + \dfrac{5}{6}p(B_n) \end{cases}$$

(d) Puisque le système $(A_n, B_n)$ est complet, on a $P(A_n) + P(B_n) = 1$.
La formule (1) combinée au fait que $p(B_n) = 1 - p(A_n)$ nous donne

$$p(A_{n+1}) = \frac{5}{6}p(A_n) + \frac{1}{6}(1 - p(A_n)) = \frac{2}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}$$

De même la formule (2) combinée au fait que $p(A_n) = 1 - p(B_n)$ nous donne

$$p(B_{n+1}) = \frac{1}{6}(1 - p(B_n)) + \frac{5}{6}p(B_n) = \frac{2}{3}p(B_n) + \frac{1}{6}$$

(e) Les suites $(p(A_n))_{n\geqslant 0}$ et $(p(B_n))_{n\geqslant 0}$ sont arithmético-géométriques. Pour l'explicitation de $p(A_n)$, on recherche la constante $L$ vérifiant

$$L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3}L = \frac{1}{6} \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}$$

on introduit alors la suite $u$ définie par $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = p(A_n) - \dfrac{1}{2}$. On a

$$u_{n+1} = p(A_{n+1}) - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}p(A_n) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}p(A_n) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(p(A_n) - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}u_n$$

Par conséquent, la suite $u$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ donc

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = (\frac{2}{3})^n u_0 \Leftrightarrow p(A_n) - \frac{1}{2} = (\frac{2}{3})^n \left[p(A_0) - \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow p(A_n) = \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^n \left[1 - \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow p(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$$

(puisque $p(A_0)$ est la probabilité que la boule blanche soit dans l'urne $U_1$ à l'issue de zéro répétition de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que la boule blanche soit dans l'urne $U_1$ au départ)
Les calculs pour la suite $(p(B_n))_{n\geqslant 0}$ étant absolument identique, on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad p(B_n) = \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^n \left[p(B_0) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^n \left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$$

(puisque $p(B_0)$ est la probabilité que la boule blanche soit dans l'urne $U_2$ à l'issue de zéro répétition de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que la boule blanche soit dans l'urne $U_2$ au départ)