correction de l'exercice 1
Chaque Troll à 4 possibilités, donc on a $\underbrace{4 \times 4 \times \cdots \times 4}_{10 \text{ foix}} = 4^{10} = 1\,048\,576$ possibilités.

On peut également considérer que chaque placement des 10 Trolls correspond à une 10-liste $(x_1, .., x_{10})$, où x_i est le numéro de la grotte où va le Troll T_i, donc $x_i \in [\![1, 4]\!]$. Les Trolls pouvant aller dans la même grotte, des éléments de la liste peuvent être égaux. L'ordre joue un rôle puisque si le Troll T_1 va danns la grotte G_1 et le Troll T_2 va dans la grotte G_2, qui correspond à la liste $(1, 2, ...)$, ce qui différent de la situation où le Troll T_1 va dans la grotte G_2 et le Troll T_2 va dans la grotte G_1, qui correspond à la liste $(2, 1, ...)$. Ainsi le nombre de manière de placer les Trolls dans les quatre grottes est le nombre de 10-liste d'un ensemble à 4 éléments, c'est-à-dire 4^{10}.

correction de l'exercice 2
Sauron choisit 6 contrées par les 12 disponibles pour le capitaine, puis il choisit 3 contrées parmi les 6 restantes pour un cavalier et il n'y a plus de choix pour le dernier, ce qui nous donne

$$\binom{12}{6} \times \binom{6}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6!} \times \frac{3!}{6 \times 5 \times 4} = 18\,480$$

possibilités de testaments

correction de l'exercice 3
On pose

- A : " ensemble des Trolls mangeant le soir de l'orc grillé "
- B " ensemble des Trolls mangeant le soit de l'hobbit saignant "

On a alors $\text{card}(A) = 24, \quad \text{card}(B) = 15, \quad \text{card}(A \cap B) = 6.$

1. (a) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 24 + 15 - 6 = 33$
   donc 33 Trolls mangent le soir de l'orc grillé ou des hobbits saignants
   (b) $\text{card}(B \backslash A) = \text{card}(B) - \text{card}(B \cap A) = 15 - 6 = 9$
   donc 9 Trolls mangent le soir des hobbits saignants mais pas d'orc grillé.
   (c) $\text{card}(A \backslash B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 24 - 6 = 18$
   donc 18 Trolls mangent le soir de l'orc grillé mais pas de hobbits saignants.

2. (a) On pose :C " aucun des quatre trolls ne mangent des hobbits saignants ou de l'orc grillé "
   Etant donné que 33 Trolls mangent des hobbits saignants ou de l'orc grillé et que l'on dispose de 120 Troll, cela signifie qu'il y a $120 - 33 = 87$ Trolls qui ne mangent ni des hobbits saignants, ni de l'orc grillé. On doit donc choisir 4 Trolls parmi ces 87, ce qui nous donne

$$P(C) = \frac{\binom{87}{4}}{\binom{120}{4}} = \frac{\dfrac{87 \times 86 \times 85 \times 84}{4!}}{\dfrac{120 \times 119 \times 118 \times 117}{4!}} = \frac{1247}{4602} \simeq 0.271 \pm 10^{-3}$$

   (b) On pose D " exactement 3 Trolls parmis les 4 mangent des hobbits saignants mais pas d'orc grillé ".
   On doit choisir 3 Trolls parmi les 9 qui mangent des hobbits saignants mais pas d'orc grillé et 1 parmi les autres, c'est-à-dire parmi les $120 - 9 = 111$, ce qui nous donne

$$P(D) = \frac{\binom{9}{3} \times \binom{111}{1}}{\binom{120}{4}} = \frac{\dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} \times 111}{\dfrac{120 \times 119 \times 118 \times 117}{4!}} = \frac{74}{65\,195} \simeq 0,001 \pm 10^{-3}$$

   (c) On pose E " exactement trois Trolls mangent des hobbits saignants et un de l'orc grillé ".
   On introduit également les trois ensembles
   - E_1 : " trois Trolls mangent des hobbits saignants mais pas d'orc grillé et un Troll mange de l'orc grillé mais pas de hobbit saignant "
   - E_2 : " deux Trolls mangent des hobbits saignants mais pas d'orc grillé, un autre Troll mange de l'orc grillé et des hobbits saignants et un dernier Troll qui ne mange ni des hobbits saignants, ni de l'orc grillé "

Les évènements E_1 et E_2 sont incompatibles (les deux ne peuvent arriver simultanément et l'on $E = E_1 \cup E_2$ donc on a

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Pour que E_1 se réalise, il faut que l'on choisisse 3 Trolls parmi les 9 mangeant des hobbits saignants mais pas d'orc grillé et 1 Troll parmi les 18 Trolls mangeant de l'orc grillé mais pas de hobbit saignant.
Pour que E_2 se réalise, il faut que l'on choisisse 2 Trolls parmi les 9 mangeant des hobbits saignants mais pas d'orc grillé, 1 Troll parmi les 6 Trolls mangeant de l'orc grillé et des hobbits saignants puis 1 Troll parmi les 87 ne mangeant ni de l'orc grillé, ni du hobbit saignant. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\binom{9}{3} \times \binom{18}{1}}{\binom{120}{4}} + \frac{\binom{9}{2} \times \binom{6}{1} \times \binom{87}{1}}{\binom{120}{4}} = \frac{\dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} \times 18}{\dfrac{120 \times 119 \times 118 \times 117}{4!}} + \frac{\dfrac{9 \times 8}{2!} \times 6 \times 87}{\dfrac{120 \times 119 \times 118 \times 117}{4!}} \\ &= \frac{1128}{456\,365} \simeq 0,002 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

Une distribution des parchemins corresponds à une 8-listes $(x_1, .., x_8)$ où x_i désigne désigne le coffre où va le $i^{ième}$ parchemin (en particulier chaque x_i peut prendre 11 valeurs). Puisque des parchemins distincts peuvent aller dans le même coffre, on peut avoir plusieurs x_i identiques. En outre, l'ordre intervient puisque la liste $(1, 2, ..)$ correspond à ce que le premier parchemin va dans le premier coffre et le second parchemin va dans le deuxième coffre alors que la liste $(2, 1, ...)$ correspond à ce que le premier parchemin va dans le deuxième coffre et le deuxième parchemin va dans le premier.
Ainsi, le nombre de distributions possibles est égal au nombre de 8-listes d'un ensemble à 11 éléments, c'est-à-dire que l'on a 11^8 choix possibles.
Une autre façon moins théorique de retrouver le résultat est de se dire que le premier parchemin a 11 choix, le second 11 aussi, ..., le huitième a aussi 11 choix, donc on a $\underbrace{11 \times \cdots \times 11}_{8 \text{ fois}} = 11^8$ choix possibles

1. On pose A " un coffre contient les 8 parchemins "
Pour que A se réalise, il faut et il suffit de placer le premier parchemin dans un coffre (11 possibilités) et les autres vont dans les même (un seul choix), ce qui nous donne
$$P(A) = \frac{11}{11^8} = \frac{1}{11^7} \simeq 5,1 \times 10^{-8} \pm 10^{-9}$$
On aurait pu également choisir un coffre parmi les 11 possibles puis placer tous les parchemins dans ce coffre (ce qui fait que chaque parchemin n'a qu'une possibilité), ce qui donne $P(A) = \dfrac{\binom{11}{1}}{11^8} = \dfrac{11}{11^8}$

2. On pose B " deux coffres contiennent quatre parchemins chacun et les neuf autres aucun "
Pour que B se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse 1 coffre parmi les 11, puis on doit choisir quatre parchemins parmi les 8 (le choix est ordonné, car on a 8 choix pour le premier, 7 pour le second, ..) on place ces quatre parchemins dans ce coffre (donc les parchemins n'ont qu'un choix), ensuite on doit choisir un coffre parmi les 10 restants, on prend les 4 parchemins restants (choix ordonné car on 4 choix pour le premier, 3 choix pour le second, ...) et on les place dans le deuxième parchemin (donc les parchemins n'ont qu'un choix). On a donc
$$P(B) = \frac{\binom{11}{1} \times A_8^4 \times \binom{10}{1} \times A_4^4}{11^8} = \frac{11 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 10 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{11^8} = \frac{403\,200}{19\,487\,171} \simeq 0,021 \pm 10^{-3}$$

3. On pose C " tous les coffres contiennent au plus un parchemin "
Pour que C se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse 8 coffres parmi les 11 et que l'on y place de façon ordonné les 8 parchemins (8 choix pour le premier, 7 pour le second, etc)
$$P(C) = \frac{\binom{11}{8} A_8^8}{11^8} = \frac{\binom{11}{3} 8!}{11^8} = \frac{\dfrac{11 \times 10 \times 9}{3!} \times 8!}{11^8} = \frac{5 \times 3 \times 8!}{11^7} = \frac{604\,800}{19\,487\,171} \simeq 0,031 \pm 10^{-3}$$

correction de l'exercice 5

1. On pose A " Gimli et Galadriel sont membres du comité "
Pour que A se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse gimli parmi les 17 nains, Galadriel parmi les 12 elfes puis que l'on choisisse 4 autres personnes parmi les 27 restantes, ce qui nous donne
$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{27}{4}}{\binom{29}{6}} = \frac{\dfrac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{4!}}{\dfrac{29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{4!}} = \frac{6 \times 5}{29 \times 28} = \frac{15}{406} \simeq 0,037 \pm 10^{-3}$$

2. On pose B " ni Gimli, ni Galadriel ne sont membres du comité ".
Pour que B se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse les 6 membres du comité parmi les personnes de l'assemblée sauf Gimli et Galadriel, c'est-à-dire parmi les 27 membres restants, ce qui nous donne
$$P(B)=\frac{\binom{27}{6}}{\binom{29}{6}}=\frac{\dfrac{27\times 26\times 25\times 24\times 23\times 22}{6!}}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}=\frac{253}{406}=0.623\pm 10^{-3}$$

3. On pose C " Gimli ou Galadriel sont membres du comité ".
On introduit les deux évènements
C_1 " on choisit un et un seul personnage parmi le tandem Gimli-Galadriel et les 5 autres membres du comité sont choisit en dehors du tandem Gimli-Galadriel "
C_2 " Galadriel et Gimli appartiennent au comité "
Dans ce cas, on a $C=C_1\cup C_2$ et les évènements C_1,C_2 étant incompatibles, on a
$$P(C)=P(C_1\cup C_2)=P(C_1)+P(C_2)$$
D'après la question 1), on a $P(C_2)=P(A)=\dfrac{15}{406}$.
Ensuite, pour que l'évènement C_1, il faut et il suffit que l'on choisisse un personnage parmi les 2 du tandem puis que l'on choisisse 5 autres membres parmi l'assemblée, sauf les membres du tandem, c'est-à-dire parmi les 27 autres. On en déduit que
$$P(C)=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{27}{5}}{\binom{29}{6}}+\frac{15}{406}=\frac{2\times\dfrac{27\times 26\times 25\times 24\times 23}{5!}}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}+\frac{15}{406}=\frac{69}{203}+\frac{15}{406}=\frac{153}{406}\simeq 0.377\pm 10^{-3}$$

4. On pose D " le comité est constitué de 3 elfes et 3 nains "
Pour que D se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse 3 elfes parmi les 12 elfes et 3 nains parmi les 17 nains, ce qui nous donne
$$P(D)=\frac{\binom{12}{3}\times\binom{17}{3}}{\binom{29}{6}}=\frac{\dfrac{12\times 11\times 10}{3!}\times\dfrac{17\times 16\times 15}{3!}}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}=\frac{7480}{23\,751}\simeq 0.315\pm 10^{-3}$$

5. On pose E " le comité contient au plus 2 nains "
On introduit les ensembles
E_0 " le comité contient 6 elfes et aucun nain "
E_1 " le comité contient 5 elfes et 1 nain "
E_2 : "le comité contient 4 elfes et 2 nains ".
On a $E=E_0\cup E_1\cup E_2$, les ensembles E_0,E_1,E_2 étant deux à deux incompatibles, on obtient
$$P(E)=P(E_0)+P(E_1)+P(E_2)$$
Ensuite, pour $k=0,1,2$, pour que l'évènement E_k se réalise, il faut et il suffit que l'on choisisse $6-k$ elfes parmi les 12 elfes et k nains parmi les 17, ce qui nous donne
$$\begin{aligned}P(E)&=\frac{\binom{12}{6}\times\binom{17}{0}}{\binom{29}{6}}+\frac{\binom{12}{5}\times\binom{17}{1}}{\binom{29}{6}}+\frac{\binom{12}{4}\times\binom{17}{2}}{\binom{29}{6}}\\&=\frac{\dfrac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6!}\times 1}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}+\frac{\dfrac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5!}\times 17}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}+\frac{\dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{4!}\times\dfrac{17\times 16}{2!}}{\dfrac{29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24}{6!}}\\&=\frac{6809}{39\,585}\simeq 0.172\pm 10^{-3}\end{aligned}$$

correction de l'exercice 6
Une sélection de 5 hobbits correspond à une 5-listes $(x_1,..,x_5)$, où x_i désigne le $i^{ième}$ hobbit sélectionné par le Balrog donc chaque x_i prend 10 valeurs possibles. Les hobbits pouvant être choisis plusieurs fois, des éléments de la 5-listes peuvent être égaux. En outre, il y a un ordre car, si l'on désigne les différents hobbits par $H_1,..,H_{10}$ la liste $(H_1,H_2,..)$ correspond au fait que le hobbit H_1 est choisi en premier et le hobbit H_2 est choisi en second alors que la liste $(H_2,H_1,..)$ correspond au fait que le hobbit H_2 est choisi en premier et le hobbit H_1 en second.

Par conséquent, le nombre de sélections de 5 hobbits est égal au nombre de 5-listes d'un ensemble à 10 éléments, c'est-à-dire qu'il y a 10^5 possibilités.
On peut également dire que l'on a 10 choix pour le premier hobbit, 10 choix pour le second, etc., ce qui nous donne $\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{5 \text{ fois}} = 10^5$ possibilités

1. On pose A " Pipin et Merry ne sont pas goûter par le Balrog "
   Pour que A se réalise, il faut et il suffit que le Balrog choisisse à chaque 1 hobbit parmi les 8 autres que Pipin et Merry. Cette situation correspond à 5-liste $(x_1, .., x_5)$ où chaque x_i prend 8 valeurs possibles, ce qui fournit 8^5 possibilités, ce qui nous donne
   $$P(A) = \frac{8^5}{10^5} = (\frac{8}{10})^5 = (\frac{4}{5})^5 = \frac{1024}{3125} \simeq 0.328 \pm 10^{-3}$$
2. On pose B " Pipin est goûter 5 fois "
   Pour que B se réalise, il faut et il suffit que le Balrog choisisse toujours Pipin. Dans ce cas, cela correspond à une 5-liste $(x_1, .., x_5)$, où chaque x_i prend toujours la valeur Pipin, ce qui fournit 1^5 possibilités, ce qui nous donn
   $$P(B) = \frac{1^5}{10^5} = \frac{1}{10^5} = 0,00001$$
3. On pose C : "Pipin ou Merry est goûter au moins une fois ".
   On constate que l'évènement contraire de C est " Pipin et Merry sont goûter 0 fois " (car le contraire de " ou " est " et " et le contraire de " au moins 1 " est " 0 "), c'est-à-dire que Pipin et Merry ne sont pas goûter par le Balrog. Par conséquent, on a $\overline{C} = A \Leftrightarrow C = \overline{A}$, ce qui nous donne, en utilisant la question 1)
   $$P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125} \simeq 0.672 \pm 10^{-3}$$