correction de l'exercice 1

1. L'expression I_n est une intégrale et pour encadrer une intégrale, il suffit d'encadrer la fonction sous l'intégrale puis d'intégrer. Dans le cas, présent, on pourrait majorer $(x-t)^n e^t$ par $x^n e^x$ mais l'intégration apporterait un facteur x (non, ce n'est pas de la bd) supplémentaire x (dû à $\int_0^x dt = x$). Nous allons simplement majorer $(x-t)^n$ par x sans toucher à e^t

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,x], \quad & 0 \leqslant t \leqslant x \Leftrightarrow -x \leqslant -t \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x-t \leqslant x \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant (x-t)^n \leqslant x^n \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant (x-t)^n e^t \leqslant x^n e^t \underset{0\leqslant x}{\Rightarrow} \int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x (x-t)^n e^t dt \leqslant \int_0^x x^n e^t dt \Rightarrow 0 \leqslant \int_0^x (x-t)^n e^t dt \leqslant x^n \left[e^t\right]_{t=0}^{t=x} \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant \int_0^x (x-t)^n e^t dt \leqslant x^n (e^x - 1) \leqslant x^n e^x \Rightarrow \forall t \in [0,x], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n e^x}{n!}\end{aligned}$$

2. $\underline{I_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}}$: On procède par une intégration par partie sur l'intégrale I_n en intégrant $t \mapsto t^n$ (car on doit obtenir I_{n+1}) et en dérivant $t \mapsto e^t$. En posant $\begin{matrix} u = e^t & u' = e^t \\ v' = t^n & v = \frac{t^{n+1}}{n+1}\end{matrix}$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\left\{\int_0^x (x-t)^n e^t dt\right\} = \frac{1}{n!}\left\{\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}e^t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}e^t dt\right\} \\ &= \frac{1}{n!(n+1)}\left[x^{n+1} + \int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt\right] = \frac{1}{(n+1)!}\left[x^{n+1} + \int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt\right] = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}\end{aligned}$$

$\underline{I_n = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}$: On procède par récurrrence en posant $(\mathcal{P}_n) : I_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Initialisation $n = 0$: $\left.\begin{matrix} I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^x (x-t)^0 e^t dt = \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \\ e^x - \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^0}{0!} = e^x - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_0 = e^x - \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $I_n = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et montrons que $I_{n+1} = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. En utilisant la relation de récurrence obtenue précédemment

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\Rightarrow \quad I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

ce qui prouve $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. En combinant les questions 1 et 2, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x$

4. En posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, on a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{\overbrace{x^{n+1}}^{\geqslant 0}}{(n+1)!} \geqslant 0$$

donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante et la question 3 montre qu'elle est majorée par e^x. Le théorème de monotonie des suites s'applique et la suite S converge.

5. A la question précédente, on a obtenu que $S_n - S_{n-1} = \frac{x^n}{n!}$ (remplacer n par $n-1$). Puisque la suite S est convergente, si l'on note L sa limite, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = L - L = 0$

6. L'encadrement de la question 1 combinée à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Par conséquent, cette limite, combinée à l'égalité $I_n = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (obtenue à la question 2) montre que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = e^x$$
Rappelons ensuite la définition de la convergence d'une série :

une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\geqslant 0}$ est convergente.
Dans ce cas, la limite de cette suite est par définition la somme de la série, c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge quel que soit le réel positif x et que sa somme est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Remarque : on démontre que le résultat reste vrai pour $x \in \mathbb{R}_-$. Pour cela, il suffit de remarquer que

- $I_n = -\frac{1}{n!}\int\limits_x^0 (x-t)^n e^t dt$ (pour avoir une intégration portant sur des bornes croissantes).
- d'utiliser que $(x-t)^n = (-1)^n(t-x)$, ce qui implique que $I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_x^0 (t-x)^n e^t dt$ (pour avoir une intégrale portant sur une fonction positive)
- d'encadrer l'intégrale $\int\limits_x^0 (t-x)^n e^t dt$ par $0 \leqslant \int\limits_x^0 (t-x)^n e^t dt \leqslant (-x)^n e^x$ pour en déduire que $|I_n| \leqslant \frac{(-x)^n}{n!} e^x$.
- Le réel $-x$ étant positif, la question 5 montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
- La formule de récurrence $I_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ et la formule $I_n = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ étant valable pour tout réel x (en particulier, pour notre x négatif), les résultats de la question 6 persistent.

correction de l'exercice 2

1. Il s'agit d'une somme de suite géométrique. Puisque $t \leqslant x$ et que $x < 1$, on en déduit que $t < 1$, ce qui nous permet d'écrire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, x], \quad \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

2. En intégrant sur $[0, x]$, on obtient
$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k = [-\ln|1-t|]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{t=x} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$$

3. On doit encadrer l'intégrale $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$, donc il suffit d'encadrer la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$ sur l'intervalle $[0,x]$. Le majorant dépendant de n, nous n'allons pas encadrer le facteur t^n, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,x], \quad & 0 \leqslant t \leqslant x \Leftrightarrow -x \leqslant -t \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-x \leqslant 1-t \leqslant 1 \underset{1-x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \\
\Rightarrow \quad & 0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \underset{t^{n+1}\geqslant 0}{\Rightarrow} \forall t \in [0,x], \quad 0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-x} \underset{0\leqslant x}{\Rightarrow} \int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}dt \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt \Leftrightarrow 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_{t=0}^{t=x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+2}}{n+2} \\
\Rightarrow \quad & 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+2} \qquad (x \in [0,1[\Rightarrow x^{n+2} \leqslant 1)
\end{aligned}$$

4. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+2)(1-x)} = 0$, l'encadrement précédent permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt = 0$. Ensuite, cette limite combinée à l'égalité nous montre que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(1-x) + \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = -\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = -\ln(1-x) \underset{j=k+1}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x^j}{j}\right) = -\ln(1-x)
\end{aligned}$$

5. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge lorsque $x \in [0,1[$ et l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n}\right) = -\ln(1-x)$

6. En choisissant $x = \frac{1}{2}$ dans la somme précédente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

7. (a) Il est immédiat que la variable X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^\times \quad \text{et} \quad P(X=n) = P(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{n-1 \text{ lancers}}\ P}^{n \text{ lancers}}) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$$

(b) On introduit l'évènement B : " obtenir une boule blanche en une pioche ". La pioche d'une boule dépend du choix de l'urne dans laquelle on pioche et l'urne dans laquelle on pioche dépend du nombre de lancers nécessaires pour obtenir " Pile ", c'est-à-dire qu'il dépend des évènements $(X=1)$, $(X=2)$, ... On introduit par conséquent, le système complet d'évènements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(X=1\cap B) + P(X=2\cap B) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n\cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P_{(X=n)}(B) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} = \ln 2
\end{aligned}$$

Justification du calcul de probabilités conditionnelles $P_{(X=n)}(B)$:
L'évènement $(X=n)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B, c'est-à-dire que l'on lancé n fois la pièce pour obtenir (pour la première fois) " Pile ", donc on pioche dans l'urne U_n, et on souhaite obtenir une boule blanche. Dans l'urne U_n, on dispose de n boules et d'une seule boule blanche donc la probabilité d'obtenir une boule blanche dans cette urne est égale à $\frac{1}{n}$, ce qui implique que $P_{(X=n)}(B) = \frac{1}{n}$