correction de l'exercice 1

Calcul de A_n :

$$A_n=\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^p=(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\cdots+(\frac{1}{3})^n=(\frac{1}{3})^2(1+(\frac{1}{3})^1+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-2}=(\frac{1}{3})^2\frac{1-(\frac{1}{3})^{n-1}}{1-(\frac{1}{3})}=\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]$$

Calcul de B_n :

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^{k+2}}=\sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^k}.\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3^2}\sum_{k=3}^{n+1}(\frac{2}{3})^k=\frac{1}{3^2}\left[(\frac{2}{3})^3+(\frac{2}{3})^3+\cdots(\frac{2}{3})^{n+1}\right]=\frac{1}{3^2}.(\frac{2}{3})^3\left[1+(\frac{2}{3})^1+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-2}\right]\\ &= \frac{1}{3^2}.(\frac{2}{3})^3.\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^3\left[1-(\frac{2}{3})^{n-1}\right]=\frac{8}{81}\left[1-(\frac{2}{3})^{n-1}\right]\end{aligned}$$

Calcul de C_N :

$$\begin{aligned}C_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(5\times 2^n+2\times 3^{2n}\right)=5\sum_{n=1}^{N}2^n+2\sum_{n=1}^{N}\underbrace{9^n}_{=(3^2)^n=3^{2n}}=5\left[2+2^2+\cdots+2^N\right]+2\left[9+9^2+\cdots+9^N\right]\\ &= 5\times 2\left[1+2^1+\cdots+2^{N-1}\right]+2\times 9\left[1+9^1+\cdots+9^{N-1}\right]=10\times\frac{1-2^N}{1-2}+18\times\frac{1-9^N}{1-9}=10(2^N-1)+\frac{9}{4}(9^N-1)\end{aligned}$$

Calcul de D_k :

$$\begin{aligned}D_k &= \sum_{n=3}^{2k}2^{3n+1}\times\frac{3^{n+1}}{4^n}=\sum_{n=3}^{2k}2\times 3\times\frac{(2^3)^n\times 3^n}{4^n}=2\times 3\sum_{n=3}^{2k}\left(\frac{2^3\times 3}{4}\right)^n=6\sum_{n=3}^{2k}6^n=6\left[6^3+6^4+\cdots+6^{2k}\right]\\ &= 6\times 6^3\left[1+6^1+\cdots+6^{2k-3}\right]=6^4\frac{1-6^{2k-2}}{1-6}=\frac{6^4}{5}\left[6^{2k-2}-1\right]=\frac{1296}{5}\left[6^{2k-2}-1\right]\end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

On constate que la suite u est arithmético-géométrique puisque $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}$. Nous allons alors expliciter u_n en fonction de n selon la méthode classique. Soit $L\in\mathbb{R}$ tel que $L=\frac{2}{3}L+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}L=\frac{1}{3}\Leftrightarrow L=1$.

On considère la suite v définie par $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_n-1$. On a alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(u_n-1)=\frac{2}{3}v_n.$$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=(\frac{2}{3})^n v_0\Leftrightarrow u_n-1=(\frac{2}{3})^n(u_0-1)\Leftrightarrow u_n=1+(\frac{2}{3})^n(u_0-1)$$

ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}\left[1+(\frac{2}{3})^k(u_0-1)\right]=\left(\sum_{k=0}^{n}1\right)+(u_0-1)\left(\sum_{k=0}^{n}(\frac{2}{3})^k\right)=(n+1)+(u_0-1)\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

correction de l'exercice 3

On constate que la suite u est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants. Nous allons alors expliciter u_n en fonction de n.

La suite u admet comme polynôme caractéristique $3x^2-5x+2$ dont les racines sont $\frac{2}{3}$ et 1. Par conséquent, il existe deux constantes réelles α et β telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha(\frac{2}{3})^n+\beta\times 1^n=\alpha(\frac{2}{3})^n+\beta.$$

Pour déterminer α et β, il suffit d'utiliser les conditions initiales.

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha(\frac{2}{3})^0+\beta=u_0\\ \alpha(\frac{2}{3})^1+\beta=u_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\\ \frac{2}{3}\alpha+\beta=3\end{array}\right.\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\\ -\frac{1}{3}\alpha=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta=5\end{array}\right.$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3(\frac{2}{3})^n + 5.$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2004} u_k &= \sum_{k=2}^{2004}\left[-3(\frac{2}{3})^k + 5\right] = -3\sum_{k=2}^{2004}(\frac{2}{3})^k + \sum_{k=2}^{2004} 5 = -3\left((\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + \cdots + (\frac{2}{3})^{2004}\right) + 5(2004-2+1) \\
&= -3(\frac{2}{3})^2\left(1 + (\frac{2}{3})^1 + \cdots + (\frac{2}{3})^{2002}\right) + 5\times 2003 = -\frac{4}{3}\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{2003}}{1-\frac{2}{3}} + 10\,015 \\
&= -4(1-(\frac{2}{3})^{2003}) + 6015 = 6011 + 4(\frac{2}{3})^{2003}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)} - \frac{2k(k+2)}{k(k+1)(k+2)} + \frac{k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)(k+2) - 2k(k+2) + k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+3k+2-2k^2-4k+k^2+k}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{2}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

donc on a bien $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3} &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{3k(k+2)(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{3k(k+1)(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&\quad - \frac{k(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3) - 3k(k+2)(k+3) + 3k(k+1)(k+3) - k(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{k^3+6k^2+11k+6-3k^3-15k^2-18k+3k^3+12k^2+9k-k^3-3k^2-2k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$.

1. En utilsant que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}}_{j=k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}}_{\text{on renomme } j \text{ en } k}$$

Or k prend les valeurs $1, \boxed{2, ..., n-1, n}$ dans la première somme et les valeurs $\boxed{2, 3, ..., n}, n+1$ pour la seconde. On constate alors que les deux sommes ont comme indices communs tous les entiers compris entre 2 et n. On applique alors la relation de Chasles pour chaque somme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \underbrace{1}_{1/k=1 \text{ quand } k=1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1}$$

ce qui nous donne

$$S_n = \left(1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

donc $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. En utilsant que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \Leftrightarrow 2T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)\\
2T_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\underbrace{\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}}_{j=k+1} + \underbrace{\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i}}_{i=k+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \underbrace{2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}}_{\text{on renomme } j \text{ en } k} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}}_{\text{on renomme } i \text{ en } k}
\end{aligned}$$

Or k prend les valeurs $1, 2, \boxed{3, ..., n-2, n-1, n}$ dans la première somme, les valeurs $2, \boxed{3, 4..., n-1, n}, n+1$ pour la seconde et les valeurs $\boxed{3, 4, 5, ..., n}, n+1, n+2$ pour la troisième. On constate alors que les trois sommes ont comme indices communs tous les entiers compris entre 3 et n. On applique alors la relation de Chasles pour chaque somme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \underbrace{1}_{1/k=1 \text{ quand } k=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/k=1/2 \text{ quand } k=2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}, \quad \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/k=1/2 \text{ quand } k=2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1}$$

$$\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{1/k=1/(n+2) \text{ quand } k=n+2}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
2T_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - 1 - 2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{n+1} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

donc $T_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+2)}$.

3. En utilsant que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{3}{k+1} + \dfrac{3}{k+2} - \dfrac{1}{k+3}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) \Leftrightarrow 6R_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\\
6R_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

(en utilisant les changements de variables $j = k+1$, $i = k+2$, $h = k+3$ puis en renommant tous les nouvelles variables en k).
Or k prend les valeurs

$$1, 2, 3, \boxed{4..., n-3, n-2, n-1, n}$$

dans la première somme, les valeurs

$$2, 3, \boxed{4, 5..., n-2, n-1, n}, n+1$$

pour la seconde, les valeurs

$$3, \boxed{4, 5, 6, ..., n-1, n}, n+1, n+2$$

pour la troisième et les valeurs

$$\boxed{4, 5, 6, 7, ..., n}, n+1, n+2, n+3$$

pour la quatrième somme. On constate alors que les quatres sommes ont comme indices communs tous les entiers compris entre 4 et n. On applique alors la relation de Chasles pour chaque somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \underbrace{1}_{1/k=1 \text{ quand } k=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/k=1/2 \text{ quand } k=2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{1/k=1/3 \text{ quand } k=3} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k},\\
\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/k=1/2 \text{ quand } k=2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{1/k=1/3 \text{ quand } k=3} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1}\\
\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} &= \underbrace{\frac{1}{3}}_{1/k=1/3 \text{ quand } k=3} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{1/k=1/(n+2) \text{ quand } k=n+2}\\
\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k} &= \sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{1/k=1/(n+1) \text{ quand } k=n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{1/k=1/(n+2) \text{ quand } k=n+2} + \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{1/k=1/(n+3) \text{ quand } k=n+3}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
6R_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right) - 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right) + 3\left(\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&\quad -\left(\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}-\frac{3}{2}-1-3\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}-\frac{3}{n+1}+1+3\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}\\
&\quad -\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

donc $R_n = \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{6(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+2)} - \dfrac{1}{6(n+3)}$

correction de l'exercice 5

1. La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = an^3 + bn^2$ vérifie la relation (E) ssi

$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{N},\quad u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = 3n-1\\
&\Leftrightarrow \left[a(n+2)^3+b(n+2)^2\right]-2\left[a(n+1)^3+b(n+1)^2\right]+\left[an^3+bn^2\right] = 3n-1 \text{ (puis on développe)}\\
&\Leftrightarrow \left[a(n^3+6n^2+12n+8)+b(n^2+4n+4)\right]-2\left[a(n^3+3n^2+3n+1)+b(n^2+2n+1)\right]+\left[an^3+bn^2\right] = 3n-1\\
&\quad \text{on regroupe ensuite les différentes puissances de } n\\
&\Leftrightarrow n^3(a-2a+a)+n^2(6a+b-6a-2b+b)+n(12a+4b-6a-4b)+(8a+4b-2a-2b) = 3n-1\\
&\Leftrightarrow 6an+(6a+2b) = 3n-1 \underset{\text{principe d'identification}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6a = 3\\ 6a+2b = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}\\ b = -2\end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite u vérifie (E) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{2}n^3 - 2n^2$.

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+2}-2z_{n+1}+z_n = (w_{n+2}-u_{n+2})-2(w_{n+1}-u_{n+1})+(w_n-u_n) = (\underbrace{w_{n+2}-2w_{n+1}+w_n}_{=3n-1 \text{ par définition}})-(\underbrace{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n}_{=3n-1 \text{ par construction}}) = 0$$

donc la suite z est bien récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est x^2-2x+1 qui admet une unique racine $x=1$. Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = (\alpha n+\beta)1^n = \alpha n + \beta$$

Puisque nous connaissons la forme de z ainsi que la forme de u, nous en déduisson la forme de w

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + z_n = \frac{1}{2}n^3 - 2n^2 + \alpha n + \beta, \text{ où } \alpha, \beta \text{ sont deux réels}$$