1 Exercices

1.1 Limites, équivalents, DL

Exercice 1 Déterminer la limite en x_0 de la fonction f

$$\text{a) } x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x^2}) \quad \text{b) } x_0 = +\infty \text{ et } f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{2x} + e^{-3x}}$$
$$\text{c) } x_0 = -\infty \text{ et } f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{2x} + e^{-3x}} \quad \text{d) } x_0 = +\infty \text{ et } f(x) = \frac{xe^{-x} - x + 1}{e^{2x} + \ln x}$$

Exercice 2 Donner un développement limité à l'ordre n de la fonction f en 0

$$\text{a) } n = 3 \text{ et } f(x) = e^{3x} - \ln(1 + 2x^2) \quad \text{b) } n = 2,\ x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \sqrt{2 - e^x}$$

Exercice 3 A l'aide d'équivalents ou de DL convenables, déterminer la limite en x_0 de la fonction f

$$\text{a) } x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1 + 3x)}{\exp(2x) - 1} \quad \text{b) } x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\exp(2x^2) - 1}$$
$$\text{c) } x = +\infty \text{ et } f(x) = (x^2 + x + 1)\ln(1 + \frac{1}{x^3}) \quad \text{d) } x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \frac{xe^{3x} - e^{2x} + 1}{xe^{-2x} + e^{-3x} - 1}$$

1.2 Continuité

Exercice 4 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis justifier qu'elles sont continues sur leurs domaines de définition respectifs

$$\text{a) } x \mapsto x + \sqrt{x + 3} \quad \text{b) } x \mapsto \frac{e^{2t+1}}{t^2 + 1} \quad \text{c) } x \mapsto \frac{3e^{3x} + 2e^x}{e^{-x} - e^{2x}} \quad \text{e) } x \mapsto \ln(3 + \frac{1}{x^4})$$

Exercice 5 On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x^2) - \exp(-x^2)}{e^x - e^{-x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
2. Est-elle continue en 0 ? Conclusion.

1.3 Dérivabilité

Exercice 6 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis justifier qu'elles sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et enfin expliciter leurs dérivées respectives.

$$a(x) = \frac{3 + x}{x^2 + 1} \quad b(x) = \frac{x}{e^x - 3} \quad c(x) = \ln(e^{-x} - e^{2x})$$

Exercice 7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans justifier la dérivabilité ni déterminer le domaine de dérivabilité). Bien entendu, il est utile de se rappeller les tables de dérivation !

$$\text{a) } \exp(4x^3 - 3x) \quad \text{b) } \ln(3 + \frac{1}{x^4}) \quad \text{c) } \sqrt{e^{2x} - \ln x} \quad \text{d) } \frac{3e^{3x} + 2e^x}{1 - e^x} \quad \text{e) } x^2 \ln(1 + \frac{1}{x^2})$$

Exercice 8 Montrer que $\forall x \geqslant 1,\ \ln x \leqslant x - 1$

1.4 Fonctions de classe C^k

Exercice 9 Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{2003}}{x^{2004} + 1}$ est de classe C^{2005} sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 On pose $f(x) = x\exp(-\dfrac{1}{x^2})$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer f'.
3. Déterminer la limite de f' en 0 (on pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2}$)
4. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$? Que vaut $f'(0)$?

1.5 Bijections

Exercice 11 On pose : $\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{t}{1-e^{-t}} & \forall t \in \mathbb{R}_+^\times \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
2. On définit, de plus, la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \psi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$.
   Déterminer le tableau de variation de ψ sur $[0, +\infty[$. En déduire le signe de ψ sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 12 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Justifier que g est dérivable en 1. Que vaut $g'(1)$?
3. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g.

1.6 Intégration

Exercice 13 On pose $I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^n}$ et $J_n = \int\limits_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^n}dt$.

1. Etude de $(J_n)_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
2. Etude de $(I_n)_n$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
   (b) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
   (c) La suite $(I_n)_n$ est-elle convergente ?
   (d) Calculer $I_n + J_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

1.7 Intégrales dépendants de ses bornes

Exercice 14 On considère la fonction $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}dt$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
3. La fonction est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition ?

Exercice 15 On considère la fonction $f(x) = \int\limits_{1/x}^x \dfrac{t}{t^4+1}dt$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. La fonction f est-elle C^1 sur son domaine de définition ?
3. Calculer sa dérivée.

1.8 Les suites

Exercice 16 Déterminer l'expression de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 0, \quad 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 17 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Soit $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Etudier les variations de g.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution notée γ.
   (c) Montrer que $0 < \gamma < 1$.
   (d) Quel est le signe de g sur $\mathbb{R}$?
3. Soit u la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à $\mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que si u converge alors sa limite est γ.
   (b) Montrer que les intervalles $]-\infty, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$ sont stables par f.
4. On suppose $u_0 \geqslant \gamma$.
   (a) Justifier que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \gamma$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite u.
   (c) Montrer que la suite u est convergente.
5. Par une méthode analogue à la question 4, étudier le cas $u_0 \leqslant \gamma$.

Exercice 18 L'objectif de l'exercice est de montrer que l'équation

$$(E) : \quad x^3 + 6x = 1$$

possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et d'en déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.

1. On pose $f(x) = x^3 + 6x$ et $g(x) = \dfrac{1}{6}(1 - x^3)$
   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
   (c) Démontrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par g et vérifier que $g(\alpha) = \alpha$?
   (d) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On introduit la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(1 - u_n^3)$ et $u_0 = 0$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

1.9 Systèmes et Matrices

Exercice 19 Soit a un nombre réel. On considère le système

$$(S_a) : \begin{cases} (a+3)\,x + (a-1)\,y + (a-1)\,z & = 0 \\ -x + 3y + z & = 0 \\ ax + ay + (a+2)\,z & = 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a le système (S_a) est-il de Cramer ?
2. Déterminer les solutions du système (S_a) lorsque $a = -1$
3. Quelles sont les solutions du système (S_a) lorsque $a \neq -1$.

Exercice 20 Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont inversibles et les inverser le cas échéant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 11 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit AB. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner sa matrice inverse.
2. Déterminer l'ensemble S des valeurs de m pour lesquels la matrice $A - mI_3$ n'est pas inversible.
3. Déterminer toutes les matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solutions de l'équation matricielle $AX = mX$ lorsque $m = 2$ puis lorsque $m = 4$.

Exercice 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Vérifier que $A^3 - A^2 + 8I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

1.10 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 23 On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $M^3 - 6M^2 + 8M = 0_3$
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux réels a_n et b_n tel que $M^n = a_n M^2 + b_n M$.
3. Exprimer a_{n+1} (resp. b_{n+1}) en fonction de a_n et b_n. Expliciter a_1, b_1, a_2, b_2.
4. Montrer que a vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
5. En remarquant que $b_n = a_{n+1} - 6a_n$, exprimer b_n en fonction de n.
6. Donner tous les coefficients de la matrice M^n.

Exercice 24 On pose $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice H telle que $M = PHP^{-1}$
3. Montrer que pour tout entier n, on a $M^n = PH^nP^{-1}$ puis donner tous les coefficients de M^n.

Exercice 25 On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Expliciter la matrice C telle que $A = B + C$.
2. Calculer B^2 puis B^k lorsque k est un entier positif quelconque.
3. Les matrices B et C commutent-elle ?
4. Calculer A^n

1.11 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 26 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $E = \{X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AX = -2X\}$ est un espace vectoriel.
2. Donner en une base.

Exercice 27 Soit f l'application définie sur $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 2x + y - 2z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de son noyau et de son image.
3. L'application f est-elle bijective ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1 : a) le changement de variable $X = \frac{1}{x^2}$ est ton ami. b), c)et d) on factorise par le "dominant" au numérateur et au dénominateur en faisant bien attention de factoriser le bon "dominant" et se référant au cours pour les limites usuelles !

Indication pour l'exercice 2 : a) on détermine les DL de e^x et $\ln(1+x)$ en 0 puis on effectue dans chacun d'eux un changement de variable adéquat
b) On effectue de DL de $2 - e^x$ puis on réinjecte dans le DL de $\sqrt{1+X}$ (vérifier que $X \to ...$)

Indication pour l'exercice 3 : a) et c) utiliser les équivalents. Pour b) donner un équivalent du dénominateur et faire un DL du numérateur pour avoir l'équivalent du numérateur. Pour le d) utiliser les DL puis obtenir les équivalents

Indication pour l'exercice 4 : se référer au cours concernant la continuité de $\frac{f}{g}$, $\sqrt{f}$, $\ln f$.

Indication pour l'exercice 5 : 1. se référer au cours concernant la continuité de $\frac{f}{g}$, $\exp f$
2. se référer au cours concernant la continuité en un point et utiliser les DL pour la limite

Indication pour l'exercice 6 : se référer au cours concernant la dérivabilité de $\frac{f}{g}$, $\ln f$

Indication pour l'exercice 7 : se référer au cours concernant la dérivée de $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $\ln f$, $\exp f$, $\sqrt{f}$

Indication pour l'exercice 8 : Dresser les variations de la fonction $f(x) = \ln x - (x-1)$

Indication pour l'exercice 9 : se référer au cours concernant les fonctions C^k (relativement au théorème sur $\frac{f}{g}$)

Indication pour l'exercice 10 : 1. utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions continues et étudier ensuite la continuité au point ne relevant pas de ces théorèmes, ici il s'agit de 0)
2. utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions C^k
3. C'est donné dans l'énoncé
4. Le théorème de prolongement continue de la dérivée est ton ami

Indication pour l'exercice 11 : 1. utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions C^k puis étudier ensuite la continuité au point ne relevant pas de ces théorèmes, ici il s'agit de 0 et enfin utiliser le théorème de prolongement continue de la dérivée.
2.b. le signe de ψ fournit le signe de φ + théorème de bijection

Indication pour l'exercice 12 : 1. Théorème de bijection, non mais.
2. utiliser le théorème sur la dérivabilité de la bijection en un point (on recherchera proprement l'antécédent)
Utiliser la caractérisation de la dérivabilité de la bijection sur un ensemble.

Indication pour l'exercice 13 : 1.a. Encadrer la fonction sous l'intégrale.
2.a. $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$ puis déterminer le signe de $f - g$.
2.b. encadrer la fonction sous l'intégrale
2.d. $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$

Indication pour l'exercice 14 : 1. 2. et 3. se référer au cours sur le calcul intégral concernant l'étude de des fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et en appliquant soigneusement le théorème correspondant.

Indication pour l'exercice 15 : 1. 2. et 3. revoir le cours sur les fonctions de la forme $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$.

Indication pour l'exercice 16 : cf. le cours correspondant.

Indication pour l'exercice 17 : 2.b. théorème de bijection sur g pour justifier l'existence de la solution à $g(x) = 0$.
2.c. Calculer $g(0)$, $g(\gamma)$ et $g(1)$.
3.a la limite éventuelle d'une telle suite est solution d'une certaine équation
3.b. le tableau de variations de f est indispensable
4. a. une récurrence
4.b. on connait le signe de $f(x) - x$ sur $[\gamma, +\infty[$ et on évalue en $x = u_n$
5. les mêmes indications que le 4.

Indication pour l'exercice 18 : 1.a. appliquer le théorème de bijection à f
1.b.. $f(0) = ...$, $f(1) = ..$,$f(\alpha) = ..$donc
1.c. tableau de variations de g puis justifier que $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 1$
2.a. Par récurrence
2.b. le TAF évalué en $x = ...$ et $y = ...$ puis on récurre (pas la casserole s'il vous plait :-))
2.c. théorème d'encadrement appliqué à $|u_n - \alpha|$

Indication pour l'exercice 19 : 1. Ce cher Karl Friedriech Gauss et son pivot pour se ramener à un système triangulaire (attention, $L_j \leftarrow \alpha L_j + \beta L_i$ est licite seulement si $\alpha \neq 0$ et β est quelconque)

Indication pour l'exercice 20 : On considère le système associé $AX = Y$, on le rend triangulaire puis on utilise la caractérisation des systèmes triangulaires de Cramer. Dans le cas, où A est inversible, alors on termine la résolution (il est néanmoins indispensable de se référer au cours associé)

Indication pour l'exercice 21 : 1. X est inversible ssi il existe Y telle que $XY = I$. Dans ce dernier cas, $X^{-1} = Y$
2. Expliciter la matrice $A - mI_3$ puis le système homogène associé et réduire ce dernier (attention, $L_j \leftarrow \alpha L_j + \beta L_i$ est licite seulement si $\alpha \neq 0$ et β est quelconque)

Indication pour l'exercice 22 : Placer les puissances de A d'un côté, factoriser.et X est inversible ssi il existe Y telle que $XY = I$. Dans ce dernier cas, $X^{-1} = Y$.

Indication pour l'exercice 23 : 2. une récurrence, $M^{n+1} = MM^n$ puis on utilise la formule $M^3 - 6M^2 + 8M = 0_3$, ensuite exprimer M^3 en fonction de M^2 et M puis on regroupe les termes en M^2 et les termes en M
3. découle du calcul précédent. On connait a_1 et b_1 par l'initialisation de la récurrence donc on en déduit a_2 et b_2
4. a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et b_{n+1} et $b_{n+1} = ...$ On remercie ensuite le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2.

Indication pour l'exercice 24 : 1. on se ramène à des systèmes
2. On exprime H en fonction de P et M puis on calcule.
3. une récurrence puis il est simple de calculer H^n lorsque H est diagonale.

Indication pour l'exercice 25 : 1. Merci la soustraction
2. Distinguer $k = 0$, $k = 1$ et $k \geqslant 2$.
3. Revoir la définition de deux matrices qui commutent
4. Le binôme de Newton est notre cher camarade (on revoit néanmoins les conditions d'utilisation)

Indication pour l'exercice 26 : 1. Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
2. Résoudre l'équation puis réinjecter les solutions dans le vecteur X.

Indication pour l'exercice 27 : 1. Le cours est notre ami.
2.Pour commencer, revoir le cours correspondant. Pour l'image, réduire le système $f(X) = Y$ afin d'obtenir les contraintes éventuelles sur Y.

3 Réponses

Réponse pour l'exercice 1 : a) 0 b) 1 c) -1 (le dominant est e^{-3x}) d) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-x}{\ln x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Réponse pour l'exercice 2 : a) $1+3x+\dfrac{5}{2}x^2+o\left(x^2\right)$ b) $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right)$

Réponse pour l'exercice 3 : a) $\dfrac{3}{2}$ ($f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{3x}{2x}$) b) 2 ($f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{4x^2}{2x^2}$) c) 0 ($f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^3}$) d) $\dfrac{1}{2}$ ($f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{-x}{-2x}$)

Réponse pour l'exercice 4 : a) $[-3,+\infty[$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}^\times$ ($e^x=e^{-2x} \Leftrightarrow x=-2x$) d) $\mathbb{R}^\times$ ($3+\dfrac{1}{x^4}\geqslant 3>0$)

Réponse pour l'exercice 5 : 1. Le numérateur et le dénominateur sont continues sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^\times$

2. Un DL du numérateur et du dénominateur en 0 nous donne les équivalents de chacun donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2x^2}{2x}=x$ d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0=f(0)$ donc f est continue en 0. Des questions 1. et 2. on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse pour l'exercice 6 : a est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et $a'(x)=\dfrac{1-6x-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$,

b est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$)et $b'(x)=-\dfrac{xe^x-e^x+3}{\left(e^x-3\right)^2}$

c est dérivable sur $\mathbb{R}_-^\times=]-\infty,0[$ ($x\mapsto e^{-x}-e^{2x}$ est dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}_-^\times$ (on résoud l'inéquation $e^{-x}>e^{-2x}$)) et $c'(x)=-\dfrac{e^{-x}+2e^{2x}}{e^{-x}-e^{2x}}$

Réponse pour l'exercice 7 : a) $\left(12x^2-3\right)\exp(4x^3-3x)$ b) $-\dfrac{4}{x+3x^5}$ c) $\dfrac{1}{2\sqrt{e^{2x}-\ln x}}\left(-\dfrac{1}{x}+2e^{2x}\right)$

d) $-e^x\dfrac{6e^{3x}-9e^{2x}-2}{\left(e^x-1\right)^2}$ e) $2x\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)-\dfrac{2x}{x^2+1}$

Réponse pour l'exercice 8 : $f(x)=\ln x-(x-1)$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}\leqslant 0$ sur $[1,+\infty[$ donc f est décroissante sur cet intervalle. Puisque $f(1)=0$, on en déduit que $\forall x\geqslant 1,\quad f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\leqslant x-1$.

Réponse pour l'exercice 9 : Quotient de deux fonctions de classe C^{2005} sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Réponse pour l'exercice 10 : 1. $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ donc $x\mapsto\exp(-\dfrac{1}{x^2})$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$, ce qui implique que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$. Si l'on pose $X=\dfrac{1}{x^2}$ alors $X\to+\infty$ lorsque $x\to0$ et $x\exp(-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{e^{-X}}{\sqrt{X}} \underset{X\to+\infty}{\to} 0$ (limite classique), on en déduit que $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0=f(0)$ donc f est continue en 0. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}^\times$ (car C^1), on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Le raisonnement précédent montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\forall x\neq0,\quad f'(x)=(1+\dfrac{2}{x^2})\exp(-\dfrac{1}{x^2})$.

3. On pose $X=\dfrac{1}{x^2}$ alors $X\to+\infty$ lorsque $x\to0$.

$$f'(x)=(1+\frac{2}{x^2})\exp(-\frac{1}{x^2})=(1+2X^2)\exp(-X) \underset{X\to+\infty}{\sim} 2X^2\exp(-X)$$

donc $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=2\lim\limits_{X\to+\infty} X^2\exp(-X)=0$ (limite usuelle).

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=0$ donc le théorème de prolongement continue de la dérivée affirme que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0)=\lim\limits_{x\to0} f'(x)=0$.

Réponse pour l'exercice 11 : 1. f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$). En outre, $\varphi(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t}{t}=1$ donc $\lim\limits_{t\to0}\varphi(t)=1=\varphi(0)$ et φ est continue en 0 et elle est continue sur $\mathbb{R}^\times$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$. Le $DL_2(0)$ de $1-(t+1)e^{-t}$ est $\dfrac{1}{2}t^2+o(t^2)$ et sa combinaison avec l'équivalent usuel $e^{-t}-1 \underset{x\to0}{\sim} -t$ nous donne

$$\varphi'(t)=\frac{1-(t+1)e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1-(t+1)e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{t\to0}\varphi'(t)=\frac{1}{2}.$$

Toutes les conditions du théorème de prolongement continu de la dérivée sont réunies, ce qui montre que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(t) = \frac{1-(t+1)e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

2. La fonction ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = te^{-t}$. On en déduit que ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \psi(t) \geqslant \psi(0) = 0$.

3. La fonction ψ est continue sur $[0,+\infty[$, strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (car $\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \dfrac{\psi(t)}{(1-e^{-t})^2} > 0$) donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\varphi([0,+\infty[) = [1,+\infty[$ (car $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t}{e^{-t}} = -te^t \to +\infty$)

Réponse pour l'exercice 12 : 1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3(x^2-1) > 0$ sur $]1,+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Elle est continue sur cet intervalle, donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$
2. Calculer $g(1) = f^{-1}(1) =$ unique antécédent de 1 par f appartenant à $[1,+\infty[$ (intervalle de départ).

$$y = f^{-1}(1) \Leftrightarrow f(y) = 1 \Rightarrow y^3 - 3y = 0 \Leftrightarrow y(y^2-3) = 0 \Leftrightarrow y \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

Or $y \in [1,+\infty[$ donc $y = \sqrt{3}$, c'est-à-dire $f^{-1}(1) = \sqrt{3}$. Ensuite,

$$f'(f^{-1}(1)) = f'(\sqrt{3}) = 3((\sqrt{3})^2 - 1) = 6 \neq 0$$

donc $f^{-1} = g$ est dérivable en 1 et $g'(1) = (f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{6}$.
3. Puisque $f'(x) = 3(x^2-1)$, on en déduit que $\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) \neq 0$ et $f'(1) = 0$ donc $f^{-1} = g$ est dérivable sur $f([1,+\infty[) \backslash \{f(1)\} = [-1,+\infty[\backslash \{-1\} =]-1,+\infty[$

Réponse pour l'exercice 13 : 1.a. $\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^n} \leqslant t^n$ donc en intégrant, on obtient $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
b. le théorème d'encadrement implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
2.a. $I_{n+1} - I_n = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{1+t^{n+1}} - \dfrac{1}{1+t^n}\right) dt = \int\limits_0^1 \dfrac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^n)(1+t^{n+1})} dt = \int\limits_0^1 \dfrac{t^n(1-t)}{(1+t^n)(1+t^{n+1})} dt$.
Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n(1-t)}{(1+t^n)(1+t^{n+1})}$ est positive sur $[0,1]$, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ donc la suite $(I_n)_n$ est croissante.
b. $\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^n} \leqslant \int\limits_0^1 dt = 1$.
c. La suite (I_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.
d. $I_n + J_n = \int\limits_0^1 \dfrac{1+t^n}{1+t^n} dt = \int\limits_0^1 dt = 1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$.

Réponse pour l'exercice 14 : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Réponse pour l'exercice 15 : 1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe dès que x et $\dfrac{1}{x}$ appartiennent à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}^\times$ (on ne peut diviser par 0).
2. On pose $g(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{1+t^4}$ et l'on a $f(x) = g(x) - g(\dfrac{1}{x})$. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ donc la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = g'(x) - (\frac{1}{x})' g'(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

Réponse pour l'exercice 16 : L'équation caractéristique est $2x^2 + 3x + 1$ dont les racines sont -1 et $-\dfrac{1}{2}$ donc il existe deux constantes α et β telles que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \alpha(-1)^n + \beta(-\dfrac{1}{2})^n$. En évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\alpha = -2$ et $\beta = 2$ donc $u_n = 2(-\dfrac{1}{2})^n - 2(-1)^n$

Réponse pour l'exercice 17 : 1.La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.a. $g'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = -\dfrac{e^x + e^{2x} + 1}{(e^x+1)^2} < 0$ donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2.b. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} g = +\infty$ $\left(\dfrac{e^x}{e^x+1} \underset{x\to-\infty}{\to} 0\right)$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$ $\left(\dfrac{e^x}{e^x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} = 1\right)$. Le théorème de bijection montre g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation $g(x) = 0 (\Leftrightarrow f(x) = x)$ possède une unique solution γ
2.c. $g(0) = \dfrac{1}{2}$, $g(1) = \dfrac{e}{e+1} - 1 = \dfrac{-1}{e+1} < 0$, $g(\gamma) = 0$ donc $g(1) < g(\gamma) < g(0)$. La fonction g étant strictement décroissante, on en déduit que $0 < \gamma < 1$.
2.d. La fonction g est positive sur $]-\infty, \gamma]$ et négative sur $[\gamma, +\infty[$
3.a. si u converge vers l alors $l = f(l)$ donc $l = \gamma$ (par unicité de la solution à $f(x) = x$)
3.b. Le tableau de variations de f nous donne $f(]-\infty,\gamma]) =]-\infty,\gamma] \subset]-\infty,\gamma]$ ($f(\gamma) = \gamma$) et $f([\gamma,+\infty[) = [\gamma,+\infty[\subset [\gamma,+\infty[$!
4.a. On procède par récurrence (je ne traite que l'hérédité, le reste étant laissé au lecteur). Si $u_n \geqslant \gamma$ alors $u_n \in [\gamma,+\infty[$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f([\gamma,+\infty[) = [\gamma,+\infty[$.
4.b. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in [\gamma,+\infty[$ donc la suite est décroissante
4.c La suite (u_n) est décroissante et minorée par γ donc elle est convergente et la question 3.a. montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$.
5.a. On procède par récurrence (je ne traite que l'hérédité, le reste étant laissé au lecteur). Si $u_n < \gamma$ alors $u_n \in]-\infty,\gamma]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f(]-\infty,\gamma]) =]-\infty,\gamma]$.
4.b. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ car $u_n \in]-\infty,\gamma]$ donc la suite est croissante
4.c La suite (u_n) est croissante et majorée par γ donc elle est convergente et la question 3.a. montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$.

Réponse pour l'exercice 18 : 1.a. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ donc f est croissante et $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} x = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} x = +\infty$. Le théorème de bijection implique que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, puisque $1 \in \mathbb{R} (= f(\mathbb{R}))$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
1.b. $f(0) = 0$, $f(\alpha) = 1$, $f(1) = 7$ donc $f(0) < f(\alpha) < f(1)$. La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $0 < \alpha < 1$.
1.c. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle est décroissante sur $[0,1]$ ($\forall x \in]0,1]$, $g'(x) = -\dfrac{x^2}{2} < 0$). Par conséquent, le tableau de variation de g sur $[0,1]$ nous donne $g([0,1]) = [0, \dfrac{1}{6}] \subset [0,1]$.
1.d. $\forall x \in [0,1]$, $|g'(x)| = \dfrac{1}{2}\left|x^2\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2.a. On procède par récurrence (je ne traite que l'hérédité, le reste étant laissé au lecteur). Si $u_n \in [0,1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,1]) \subset [0,1]$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$.
2.b. la question 1.d nous permet d'appliquer le TAF donc $\forall x, y \in [0,1]$, $|g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$. Ensuite on pose $x = u_n \in [0,1]$ et $y = \alpha \in [0,1]$, ce qui nous donne $|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Ensuite on procède de nouveau par récurrence. Pour l'initalisation $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - \alpha \leqslant 1$. Par conséquent, on a $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$. Pour l'hérédité, si $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
2.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc on peut appliquer le théorème d'encadrement à l'inégalité $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Réponse pour l'exercice 19 : 1.$(S_a) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + z & = 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (a+3)\,x + (a-1)\,y + (a-1)\,z & = 0 \\ ax + ay + (a+2)\,z & = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + z & = 0 \\ 4\,(a+2)\,y + 2(a+1)z & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + (a+3)L_1 \\ 4ay + 2\,(a+1)\,z & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + aL_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 3y & = 0 \\ 2(a+1)z + 4\,(a+2)\,y & = 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \text{(on va éliminer ensuite } z \text{ cela est plus simple)} \\ 2\,(a+1)\,z + 4ay & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 3y & = 0 \\ 2(a+1)z + 4\,(a+2)\,y & = 0 \\ -4y & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}.$$

Ce dernier système est carré et triangulaire donc il est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, ce qui signifie $a \neq -1$
2. $(0,0,0)$ 3. $S = \{(x,0,x), \quad x \in \mathbb{R}\}$

Réponse pour l'exercice 20 : A non inversible, B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, C non inversible, D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 6 \end{pmatrix}$ E est inversible et $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse pour l'exercice 21 : 1. $AB = 8I$ donc $A(\frac{1}{8}B) = I$ ce qui implique que A est inversible et son inverse est $\frac{1}{8}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. $S = \{2, 4\}$

3. lorsque $m = 2$, $X = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec y et z décrivant $\mathbb{R}$

Lorsque $m = 4$, $X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec y décrivant $\mathbb{R}$

Réponse pour l'exercice 22 : $A^3 - A^2 + 8I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A(A^2 - A) = -8I \Leftrightarrow A\left(\frac{A-A^2}{8}\right) = I$ donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{A-A^2}{8}$.

Réponse pour l'exercice 23 : 2. Par récurrence, pour l'initialisation $n = 1$, il suffit de choisir $a_1 = 0$ et $b_1 = 0$. Pour l'hérédité,

$$M^{n+1} = M^n M = (a_n M^2 + b_n M)M = a_n M^3 + b_n M^2 = a_n(M^2 - 8M) + b_n M^2 = (a_n + b_n)M^2 - 8a_n M.$$

On choisit alors $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -8a_n$

3. $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -8a_n$.Puisque $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, on a $a_2 = 6 \times 0 + 1 = 1$ et $b_2 = -8 \times 0 = 0$

4. $a_{n+2} = 6a_{n+1} + b_{n+1} = 6a_{n+1} - 8a_n$. L'équation caractéristique est $x^2 = 6x - 8$ donc les racines sont 2 et 4 d'où $a_n = \alpha 2^n + \beta 4^n$.

Pour déterminer α et β, on utilise le système $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 4\alpha + 16\beta = 1 \end{cases}$ dont la solution est $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{8}$

Pour finir $a_n = -\frac{1}{4}2^n + \frac{1}{8}4^n$

5. $b_n = -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n - 6(-\frac{1}{4}2^n + \frac{1}{8}4^n) = 2^n - 4^{n-1}$

6. si $n \geqslant 1$, $M^n = \left(-\frac{1}{4}2^n + \frac{1}{8}4^n\right) M^2 + \left(2^n - 4^{n-1}\right) M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n \\ -\frac{1}{2}2^n & -\frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \end{pmatrix}$

Réponse pour l'exercice 24 : 1.$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3. $M = PHP^{-1} \Leftrightarrow H = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. La première égalité se traite par la récurrence classique.

$$M^n = PH^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n & -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n \\ -\frac{1}{2}2^n & -\frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \end{pmatrix}$$

Réponse pour l'exercice 25 : 1. $C = A - B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$

2. $B^2 = 0_3$ donc $C^k = 0_2$ si $k \geqslant 2$. D'autre part, $C^1 = C$ (arf) et $C^0 = I_3$

3. $BC = CB$ donc elles commutents (puisque que C est un multiple de l'identité, on est dispensé de faire le calcul, cf. le cours).

4. Les matrices B et C commutent donc le binôme de Newton montre que

$$(B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k C^{n-k} = B^0 C^n + nBC^{n-1} = 4^n I_3 + n4^{n-1} B$$

$$\Rightarrow A^n = 4^n I_3 + n4^{n-1} B = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ n4^{n-1} & 4^{n-1}(4-n) & -n4^{n-1} \\ -n4^{n-1} & n4^{n-1} & 4^{n-1}(4+n) \end{pmatrix}$$

Réponse pour l'exercice 26 : 1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels. E est inclu dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $0_{4,1} \in E$ car $A0_{4,1} = 0_{4,1} = 2 \times 0_{4,1}$ donc $E \neq \emptyset$. Si $X, Y \in E$ et soient λ, μ deux réels alors

$$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = -2\lambda X - 2\mu Y = -2(\lambda X + \mu Y)$$

donc $\lambda X + \mu Y \in E$, ce qui démontre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc E est un espace vectoriel.

2. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow AX = -2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -2x \\ x - y + z + t = -2y \\ x + y - z + t = -2z \\ x + y + z - t = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ 2y + 2z + 2t = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - t \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent, $E = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. La famille $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc génératrice de E et elle est libre $z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{4,1} \Leftrightarrow z = t = 0$) donc elle forme une base de E.

Réponse pour l'exercice 27 : 1. cf. les exemples du cours.

2. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y - 4z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

donc $\ker(f) = \{0_{3,1}\}$ et f est injective.

$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow$ il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(X) = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y - 2z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -3y - 4z = b - 2a \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2z = c - a \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$. Ce dernier système est toujours soluble quel que soit $Y \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, tout vecteur de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent donc $\text{Im}(f) = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ce qui implique que f est surjective.

3. L'application f est injective et surjective donc bijective.