L'objectif de ce devoir à la maison est de démontrer la convergence des séries usuelles et de justifier le calcul de leurs sommes.

Exercice 1

Séries géométriques. Soit $x \in]-1,1[$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $S_n(x)$. En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge et expliciter sa limite.
2. Calculer de deux façons distinctes la dérivée $S_n'(x)$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} kx^k = x.\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nx^n$.
5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 2

Série de Riemann. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

1. Questions préliminaires :
   (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\int_{n+1}^{n+2} \dfrac{dt}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_{n}^{n+1} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\int_1^{n+1} \dfrac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^n \dfrac{dt}{t^\alpha}$.
   (c) Calculer $\int_1^n \dfrac{dt}{t^\alpha}$.
2. On suppose $\alpha = 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donner un équivalent de S_n.
3. On suppose $\alpha \in]0,1[$. Comparer $\dfrac{1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{k}$.

   Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
4. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Donner la monotonie de la suite S_n.
   (b) Montrer que S_n est majorée par $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.
   (c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

Exercice 3

Série exponentielle.

On pose pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel x, $I_n(x) = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$

1. Etude la suite $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ lorsque $x \neq 0$.
   (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$.
   (b) En déduire qu'il existe $N \geqslant 0$, tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n(x)|$.
   (c) Montrer que $\forall n \geqslant N$, $|u_n(x)| \leqslant (\dfrac{1}{2})^{n-N}|u_N(x)|$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)$
2. Etude de la suite $(I_n(x))$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|I_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n}{n!}e^x$. en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $I_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0$, $e^x = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + I_n(x)$
3. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge et donner sa somme.