On considère l'application $f\ :[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. **Etude de la classe de f.**
   (a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.
   (c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
   (d) En déduire que f est C^1 sur $[0;+\infty[$.
   (e) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que :
   $$\forall x\in]0;+\infty[,\quad f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x-2e^x+x+2)$$
2. **Etude des variations de f.**
   (a) Etudier les variations de la fonction $g\ :[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par :
   $$g(x)=xe^x-2e^x+x+2$$
   En déduire : $\forall x\in]0;+\infty[,\quad f''(x)>0$.
   (b) En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
   (d) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 puis étudier la position relative de cette tangente sur $\mathbb{R}_+$ (on introduira une fonction convenable et on étudiera sa dérivée seconde).
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0=0$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer : $\forall x\in[0;+\infty[,\quad |f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$ et $0\leqslant f(x)\leqslant 1$
   (b) Résoudre l'équation $f(x)=x$, d'inconnue $x\in]0;+\infty[$.
   (c) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_{n+1}-\ln 2|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|$
   (d) Etablir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.